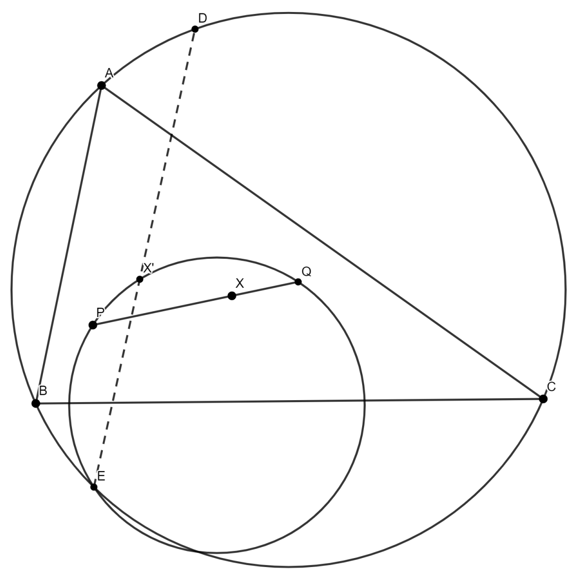
Изогональное сопряжение и частный случай точек Микеля

1. Объект исследования:

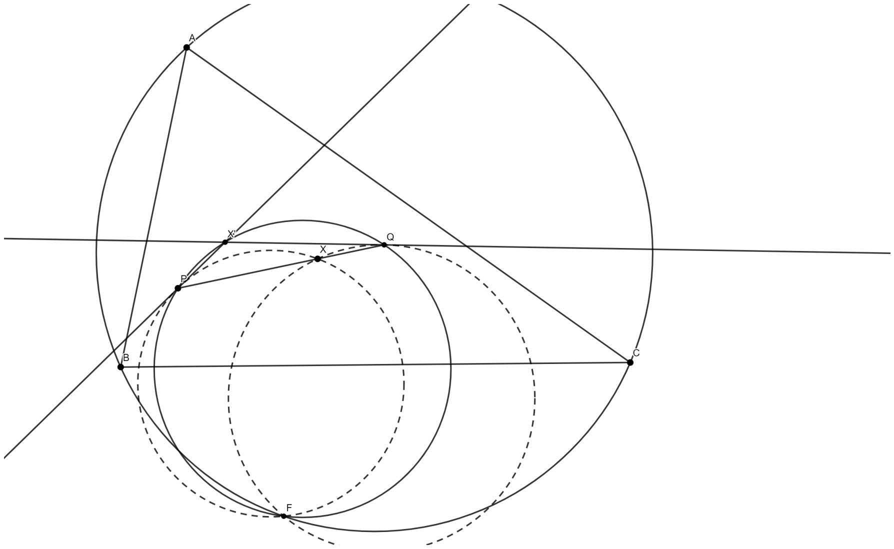
В треугольнике $\triangle ABC$ (P, Q) - пара изогонального сопряжения. Пусть X точка на прямой PQ. Точка X' - изогонально сопряжена точке X в треугольнике $\triangle ABC$. Пусть E, F пересечение окружностей $\odot(ABC)$ и $\odot(X'PQ)$. (из утверждений ниже будет следовать,что эти окружности всегда пересекаются, что само по себе интересно)
В этой статье будут показаны свойств точек E, F для любой точки X, также будут рассмотрены частные случай точки X и пар точек (P, Q).
Для начала введём несколько обозначений.
Описаную окружность треугольника $\triangle ABC$ будум обозначать $\odot(ABC)$.
Прямая Штейнера точки $X \in \odot(ABC)$ относительно треугольника $\triangle ABC$ это прямая, которая параллельна прямой Симсона точки X относительно треугольника $\triangle ABC$ и проходит через ортоцентр треугольника $\triangle ABC$. (прямая Симсона точки $X \in \odot(ABC)$ относительно треугольника $\triangle ABC$ соединяет основания перпендикуляров из точки X на стороны треугольника $\triangle ABC$).
Точка Анти-Штейнера прямой HX, где H ортоцентр треугольника $\triangle ABC$ эта точка на окружности $\odot(ABC)$, такая, что её прямая Штейнера совпадает с прямой HX.
$\mathcal{S}_X$ - это прямая Штайнера точки X в треугольнике $\triangle ABC$, если $X \in \odot(ABC)$. (В [2] можно прочитать несколько статей о прямой Штейнера и ее свойствах). Мы также будем использовать следующее свойство:
$X, Y \in \odot(ABC), \angle(\mathcal{S}_X, \mathcal{S}_Y) = \overset{\frown}{XY}$. Мы будем называть M точкой Микеля $ABCD$ если $\triangle MAD \sim \triangle MBC$, также необходимо обратить внимание на то, что некоторые три точки могут лежать на одной прямой или пара точек может совпадать. (Про точку Микеля и её свойства можно также прочитать в [2]).
Также мы будем использовать следующее свойство: Прямая проходящая через основания перпендикуляров из точки M на стороны $ABCD$ перпендикулярна прямой Гаусса этого четырёхугольника (Прямая, которая соединяет середины диагоналей про неё и про это свойство также написано в [2])

Общее свойство 1:
Пусть D такая точка, что $\mathcal{S}_D \perp PQ$. Тогда D, X' и одна из точек E, F лежат на одной прямой. Будем считать, что эта точка будет E и в дальнейшем будем назвать эту точку "1-ая точка окружности $\odot(***)$", а точку F, как "2-ая точка окружности $\odot(***)$"(в данном случае $\odot(***) = \odot(X'PQ)$).



Это свойство мы докажем с помощью **Общее свойство 2** , которое будет обозначено ниже.

Общее свойство 2:
M, N - середины PQ, XX' соответственно. Тогда окружности $\odot(FPX), \odot(FQX)$ касаются прямых $X'P$ и $X'Q$ в точках P, Q соответственно и $\mathcal{S}_F \perp MN$.



Это свойство в свою очередь частный случай известного утверждения, которое будет сформулировано и доказано ниже.

2. Теорема Микеля об изогональном сопряжении

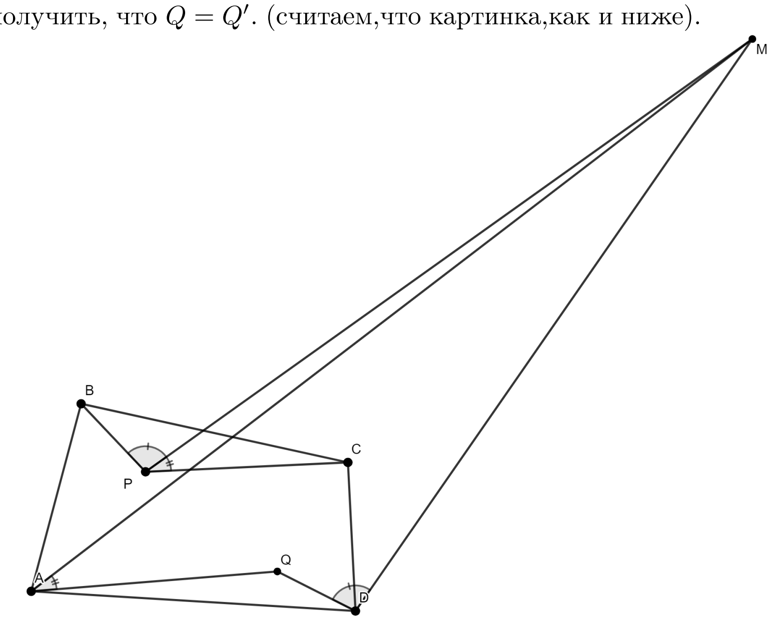
Теорема Микеля об изогональном сопряжении. В треугольнике $\triangle ABC$ $(P,Q),(R,S)$ - пары изогонального сопряжения. Пусть M точка Микеля $PRQS$. Тогда $M \in \odot(ABC)$ и $\mathcal{S}_M \perp UV$, где U,V середины отрезков PQ и RS. (**Th**)

Для начала сформулируем несколько лемм. Некоторые леммы не будут доказаны здесь, но на них будут даны ссылки на материалы с доказательством.

Лемма 2.1:
Внутри четырёхугольника $ABCD$ выбрана точка P так, что $\angle APB+\angle CPD = 180°$. Тогда у точки P существует изогонально сопряжённая точка в четырёхугольнике $ABCD$. (Доказательство есть в [1])
(точка P может быть не внутри четырёхугольника, но тогда условие меняется на то, что сумма напревленых углов равна нулю)

Лемма 2.2:
Дан четырёхугольник $ABCD$ и в нём пара изогонального сопряжения (P,Q). Пусть M точка Микеля $ABCD$. Пусть Φ_M композиция инверсии центром в точке M и радиусом $\sqrt{MA*MC}$ + симметрия относительно биссектрисы угла $\angle AMC$. Тогда $\Phi_M(P)=Q$.

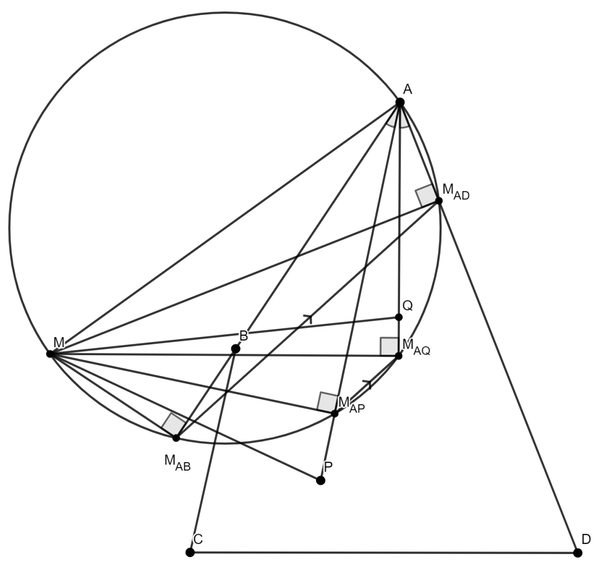
Доказательство:
Из свойств точки Микеля понятно, что $\Phi_M(A) = C, \Phi_M(B) = D$. Пусть $Q' = \Phi_M(P)$. Тогда $\angle BAQ + \angle CDQ = 180 - \angle APD = \angle BPC = \angle MPB + \angle MPC = \angle MAQ' + \angle MDQ' = \angle MDC + \angle Q'DC + \angle Q'AM = \angle Q'AM + \angle Q'DC + \angle MAB = \angle BAQ' + \angle CDQ'$. Аналогичные расссуждения можно проделать и для других сторон и получить, что $Q = Q'$. (считаем,что картинка,как и ниже).



Лемма 2.3:
В четырёхугольнике $ABCD$ $(P, Q), (R, S)$ - две пары изогонально сопряжённых точек. Тогда в четырёхугольнике $PRQS$ (A, C) и (B, D) также пары изогонально сопряжённых точек.

Доказательство:
По **Лемме 2.1** у точек A, B, C, D существуют изогонально сопряжённые точки в четырёхугольнике $PRQS$. А по **Лемме 2.2** точки Микеля $PRQS$ и $ABCD$ совпадают, также $\Phi_M(A) = C, \Phi_M(B) = D => (A, C), (B, D)-$ пары изогонального сопряжения в четырёхугольнике $PRQS$.
Лемма 2.4:
В четырёхугольнике $ABCD$ $(P, Q)-$ пара изогонального сопряжения. Тогда середина PQ лежит на прямой, которая соединяет середины отрезков AC и BD.

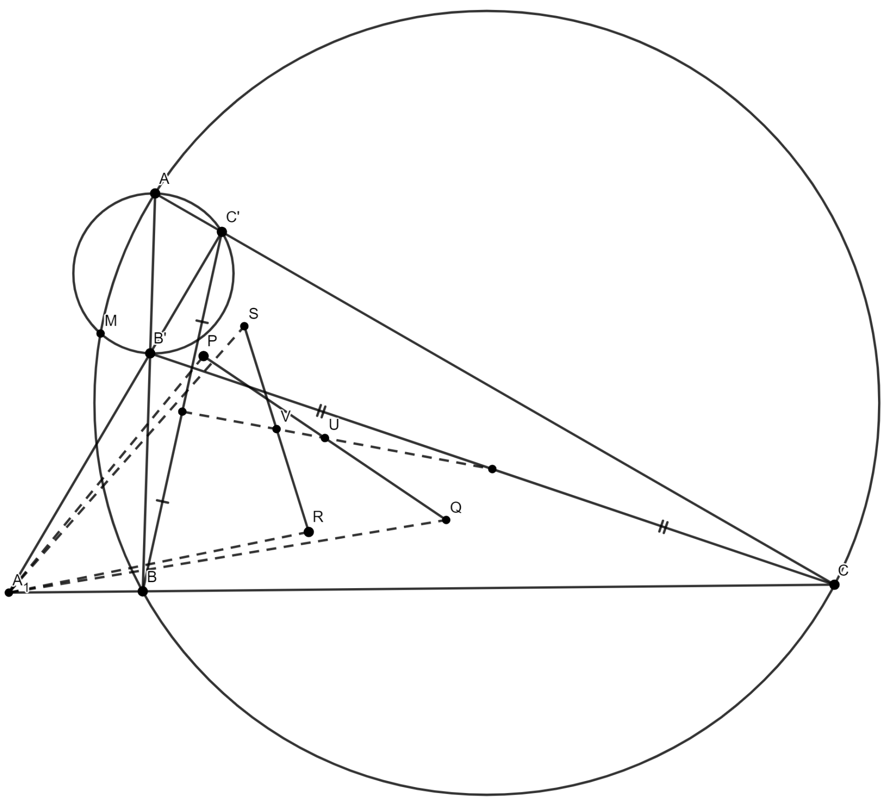
Доказательство:
M точка Микеля $ABCD$. По **Лемме 2.2** точка Микеля $AQCP$ совпадает с точкой M, тогда нам надо доказать, что прямые Гаусса четырёхугольников $ABCD$ и $AQCP$ совпадают. Так как прямая Гаусса перпендикулярна прямой, которая соединяет основания перпендикуляров из точки Микеля на стороны четырёхугольника, тогда нам достаточно доказать, что прямая, которая соединяет основания перпендикуляров точки M на прямые AP и AQ параллельна прямой, которая соединяет основания перпендикуляров на прямые AB и AD. Обозначим их, как $M_{AP}, M_{AQ}, M_{AB}, M_{AD}$ соответственно. Тогда $M, A, M_{AP}, M_{AQ}, M_{AB}, M_{AD}$ лежат на одной окружности с диаметром AM, с другой стороны $\angle M_{AB}AM_{AP} = \angle M_{AD}AM_{AQ}$ => $M_{AP}M_{AQ}M_{AD}M_{AB}$ равнобокая трапеция => $M_{AP}M_{AQ} \parallel M_{AD}M_{AB}$ что и требовалось.



Следствие 2.4:
Если в четырёхугольнике $ABCD$ $(P, Q), (R, S)$ - две пары изогонального сопряжения. Тогда прямые Гаусса четырёхугольника $PRQS$ и $ABCD$ совпадают.

Вернёмся к основной задаче.

Стоит заметить, что леммы, использованные выше, связаны со свойствами кубики фокусов, которым посвящена статья А.Акопяна и А.Заславского в «Математическом просвещении» №11. Возможно читателю, использование кубик позволит взглянуть на приведенные факты с другой стороны. По **Лемме 2.1** у точек B, C существуют изогонально сопряжённы е точки в четырёхугольнике $PRQS$, обозначим их C', B' соответственно. Прямая $B'C'$ пересекает прямые AB, AC, BC в точках B'', C'', A_1 соответственно => по **Лемме 2.3** в четырёхугольнике $BB'C'C$ $(P, Q), (R, S)$ - пары изогонального сопряжения, тогда (A_1P, A_1Q) и (A_1R, A_1S) изогонали относительно $\angle(\overline{B''C''A_1}, \overline{A_1BC})$ => $(P, Q), (R, S)-$ пары изогонального сопряжение в треугольниках $\triangle A_1BB''$ и $\triangle A_1CC''$ => $(P, Q), (R, S)$ - пары изогонального сопряжения в четырёхугольнике $BB''C''C$ => $B' = B'', C' = C''$ => по **Лемме 2.2** точки Микеля $BB'C'C$ и $PRQS$ совпадают (обозначим её, как M) => $M \in \odot(ABC)$, $\mathcal{S}_M \perp$ прямой Гаусса четырёхугольника $BB'C'C$ по **Следствию 2.4** она совпадает с прямой UV, что и требовалось.



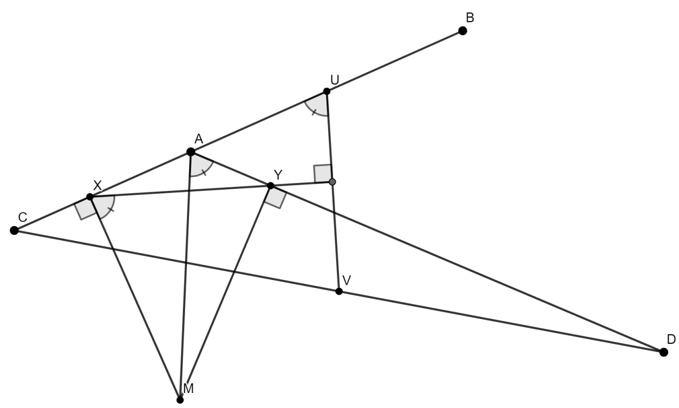
Теперь вернёмся к доказательству **Общего свойства 2.**

Доказательство:

Пусть F' точка Микеля $PXQX'$. Тогда по **Th** $F' \in \odot(ABC)$, с другой стороны X, P, Q лежат на одной прямой $=> F' \in \odot(X'PQ) => F = F'$ и окружности $\odot(F'QX), \odot(F'PX)$ касаются прямых $X'Q$ и $X'P$ в точках Q, P соответственно, что и требовалось.

Теперь пользуясь этим утверждением докажем **Общее свойство 1**.

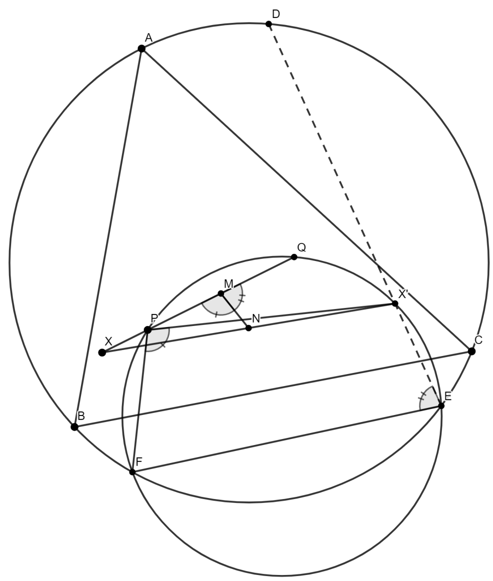
Доказательство:
Для начала давайте решим такую задачу:
Даны точки B, A, C на одной прямой (в таком порядке) и D любая точка на плоскости. Пусть M точка Микеля прямых $ADBC$. U, V середины отрезков AB и CD соответственно. Докажите,что $\angle CUV = \angle MAD$. (считайте, что картинка, как и ниже)
Доказательство:
Пусть X, Y основания перпендикуляров точки M на прямые AC и AD соответственно. Так, как UV прямая Гаусса $ACBD => UV \perp XY => \angle CUV = 90° - \angle UXY = \angle MXY = \angle MAD$, что и требовалось.



Вернёмся к решению.

Достаточно доказать, что $\angle FED = \angle FEX' = 180 - \angle FPX'$. Применяя задачу, которую мы только что доказали $180 - \angle FPX' = 180 - \angle PMN = \angle NMQ$.

Используя **Общее свойство 2** мы получаем $\angle NMQ = \angle(PQ, MN) = \angle(\perp PQ, \perp MN) = \angle(\mathcal{S}_D, \mathcal{S}_F) = \angle FED$, что и требовалось. (считайте, что картинка, как и ниже)

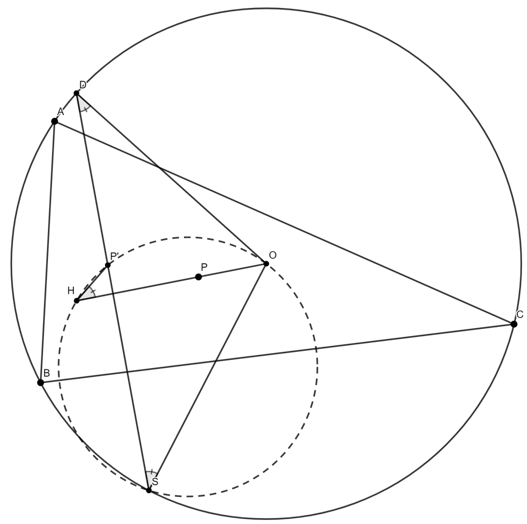


Давайте теперь рассмотрим некоторые интересные частные случаи.

3. Прямая PQ, как прямая Эйлера

Рассмотрим такую конфигурацию:
В треугольнике $\triangle ABC$ O, H центр описанной окружности и ортоцентр соответственно. $P \in OH$. P' - изогонально сопряжена точке P в треугольнике $\triangle ABC$. S точка Анти-Штейнера прямой HP'. Тогда H, O, P', S - лежат на одной прямой.

Доказательство:
Точка D такова, что $\mathcal{S}_D \perp OH$. Пусть S' "1-ая точка окружности $\odot(OHP')$". Тогда по **Общему свойству 1** S', D, P' лежат на одной прямой $=> \angle P'HO = \angle P'S'O = \angle DS'O = 90 - \angle(\mathcal{S}_D, \mathcal{S}_{S'}) = \angle(\perp \mathcal{S}_D, \mathcal{S}_{S'}) = \angle(OH, \mathcal{S}_{S'})$. $=> \mathcal{S}_{S'} = \overline{HP'}$ $=> S'$ - точка Анти-Штейнера прямой HP'.

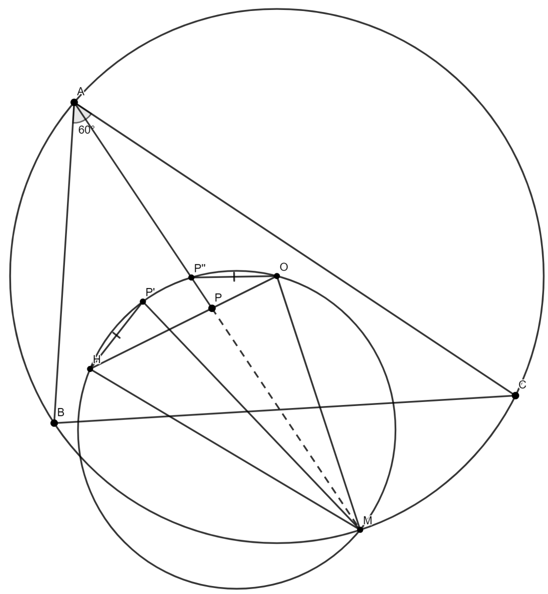


Теперь давайте рассмотрим похожую конфигурацию.

Угол $\angle A = 60^\circ$:

В треугольнике $\triangle ABC$ $\angle A = 60^\circ$ и O, H центр описанной окружности и ортоцентр соответственно. $P \in OH$. P' - изогонально сопряжена точке P в треугольнике $\triangle ABC$. Пусть M "2-ая точка окружности $\odot(OHP')$". Тогда A, P, M - лежат на одной прямой.

Доказательство:
Из базовых свойств треугольника с углом 60° точки O, H симметричны относительно биссектрисы угла $\angle A$. Пусть P'' и P' симметричны относительно биссектрисы угла $\angle A$. $=> P', P'', O, H, M-$ лежат на одной окружности и $HP' = OP''$. Тогда по **Общему свойству 2** $\triangle MP'H \sim \triangle MOP =>$ $\angle OMP = \angle HMP'' => P'', P, M$ лежат на одной прямой, что и требовалось.



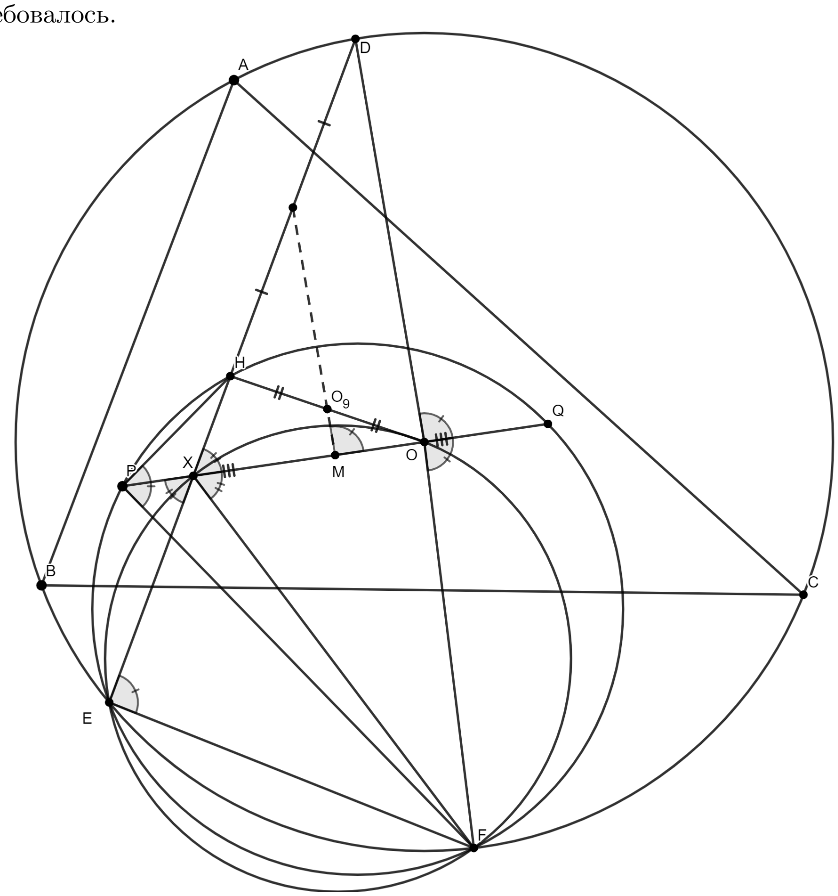
Если сложить эти результаты, то можно получить решение задачи $P7$ олимпиады $SAGF$ 2023 .

Условие задачи:
В ΔABC $AB > AC$, $\angle BAC = 60°$. L - точка Лемуана(точка пересечения симедиан). O - центр $\odot(ABC)$. H - ортоцентр треугольника. M - середина отрезка BC. Прямая AM повторно пересекает $\odot(ABC)$ в точке P. Точка S пересечения прямых симметричных прямой HL относительно сторон AB и AC. Докажите, что:
(a) L, H, O, P - лежат на одной окружности.
(b) L, H, O, P, S - лежат на одной окружности.

4. Прямая PQ проходит через O

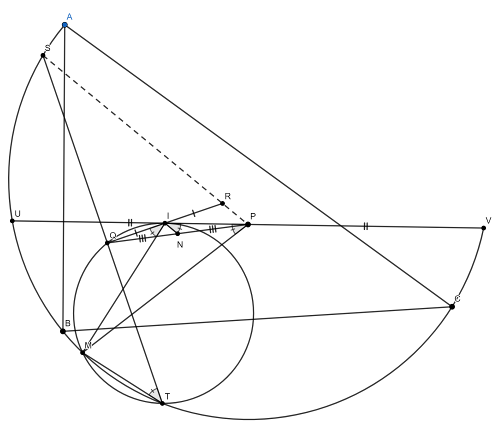
Давайте с помощью наших наблюдений докажем одно из обобщений теоремы Фейрбаха.
Обобщение:
В треугольнике $\triangle ABC$ O, H центр описанной окружности и ортоцентр соответственно. Точки P, Q изогонально сопряжены в треугольнике $\triangle ABC$ и $O \in PQ$. Тогда педальная окружность точек P и Q касается окружности девяти точек треугольника $\triangle ABC$.
Доказательство:
Пусть D такова, что $\mathcal{S}_D \perp PQ$. Тогда середина HD лежит на окружно-

сти девяти точек $\triangle ABC$ и на педальных окружностях точек P, Q (широко известное свойство точки Понселе). Тогда достаточно доказать, что середины HD, OH, PQ лежат на одной прямой. Пусть M середина PQ, а O_9 середина OH. Окружность $\odot(HPQ)$ пересекает окружность $\odot(ABC)$ в точках E, F (будем считать, что E "1-ая точка окружности $\odot(HPQ)$"). Достаточно доказать, что $OD \parallel O_9M <=> \angle O_9MO = \angle DOQ$. Тогда из **Общего свойства 2** и **Общего свойства 1** $\angle DEF = \angle O_9MO$, E, H, D лежат на одной прямой, $\angle HPF = \angle FOQ$. Пусть прямая HD пересекает PQ в точке $X => O, X, E, F$ лежат на одной окружности. Так как $OE = OF$ $=> XO$ - внешняя биссектриса угла $\angle EXF => \angle OXF = \angle OXD$ и $\angle OFX = \angle OEX = \angle ODX => \triangle OXD = \triangle OFX => \angle DOQ = \angle FOQ = \angle DEF$, что и требовалось.



5. Инцентр и пара изогонального сопряжения

Лемма 5.1
В треугольнике $\triangle ABC$ $(P, Q)-$ пара изогонального сопряжение и I инцентр. Точка M такова, что $\triangle MIP \sim \triangle MQI$. N середина PQ. Тогда $M \in \odot(ABC)$ и $\mathcal{S}_M \perp IN$.
Доказательство: Частный случай **Th**.
Теперь давайте решим задачу с "Турнира Колмогорова 2021". Авторы: И. Фролов, Н. Чернега, Ф.Ивлев.
Условие: В треугольнике $\triangle ABC$ отмечена точка P такая, что $\angle IPO = 90°$, где I и O — центры вписанной и описанной окружностей соответственно. Точка Q изогонально сопряжена точке P относительно треугольника $\triangle ABC$, а точка R симметрична Q относительно I.На описанной окружности треугольника $\triangle ABC$ отмечена точка S такая, что $\angle(PI, AI) = \angle(AI, AS)$. Докажите, что точки P, R и S лежат на одной прямой.
Доказательство: Из условия $\angle(PI, AI) = \angle(AI, AS)$ следует, что $\mathcal{S}_S \perp IP$. Пусть N - середина PQ. Точка M такова, что $\triangle MIP \sim \triangle MQI$, тогда по **Лемме 6.1**. Окружность $\odot(MQI)$ повторно персекает окружность $\odot(ABC)$ в точке T. Тогда по **Общее свойство 1** S, Q, T - лежат на одной прямой. Прямая IP пересекает окружность $\odot(ABC)$ в точках U, V. Тогда из условия $\angle IPO = 90° => P$ - середина UV. Достаточно доказать, что $IN \parallel PS$. $\angle IPM = \angle QIM = \angle QTM = \angle STM => SUMV-$ гармонический четырёхугольник $=> \angle(SP, IP) = \angle IPM = \angle QIM = \angle PIN => IN \parallel PS$. (так как IM I - симедиана треугольника $\triangle IPQ$).



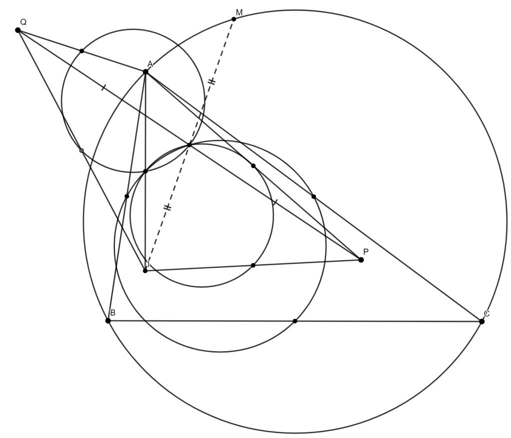
Следующая задача немедленно решается с использованием свойств, которые использовались при решении предыдущей задачи.
Условие:
Пусть I, O, H и Ω инцентр, центр окружности, ортоцентром и описанной окружностью треугольника $\triangle ABC$ соответственно. Предположим, что линия AI снова пересекается с Ω в точке $M \neq A$, прямые IH и BC встречаются в точке D, а прямая MD снова пересекается с Ω в точке $E \neq M$. Докажите, что прямая OI является касательной к описанной окружности треугольника $\triangle IHE$. (2022 Тайвань TST Раунд 2 Независимого исследования 1-G) (Предложено Li4 и Лео Чангом).

6. Подробнее о лемме 5.1 и другое доказательство Th

Также Лемму 5.1 можно доказать следующем образом:
Для начало обозначим широко изветсную лемму.

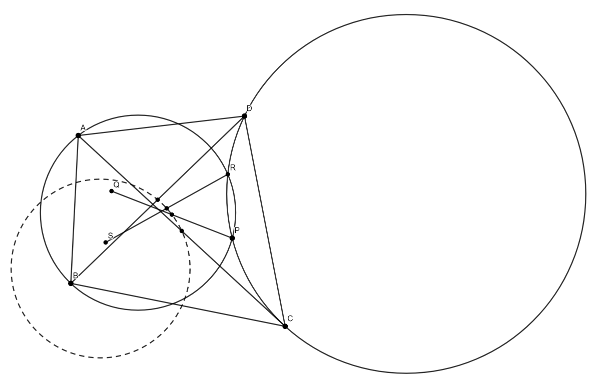
Лемма 6.1:
A, B, C, P четыре точки общего положения. Тогда окружности девяти точек треугольников $\triangle ABC, \triangle APC, \triangle APB, \triangle BPC$ пересекаются в одной точке. (Эта точка называется точкой Понселе для A, B, C, P). (Данная конфигурация считается широко известной и тесно связана с равнобокими гиперболами). (Об этом можно прочитать в [4])

Вернёмся к доказательству.
Доказательство:
Сделаем инверсию с центром в точке I и любым радиусом. Образы будем обозначать теми же буквами. Заметим, что окружность симметричная окружности $\odot(AIP)$ относительно прямой AI проходит через точку Q => середина PQ лежит на окружности девяти точек треугольников $\triangle AIP$ и $\triangle AIQ$ => середина PQ точка Понслеле для A, I, P, Q. По аналогичным рассуждениям для каждой вершины, тогда середина PQ точка Понселе A, B, C, P, Q => она лежит на окружности девяти точек треугольника $\triangle ABC$. Так как I ортоцентр треугольника $\triangle ABC$ => Отражение точки I относительно середины PQ лежит на окружности $\odot(ABC)$, с другой стороны она совпадает с точкой M.(То что $\mathcal{S}_M \perp IN$ доказывается счётом углов, читателю предлагается сделать это самостоятельно)

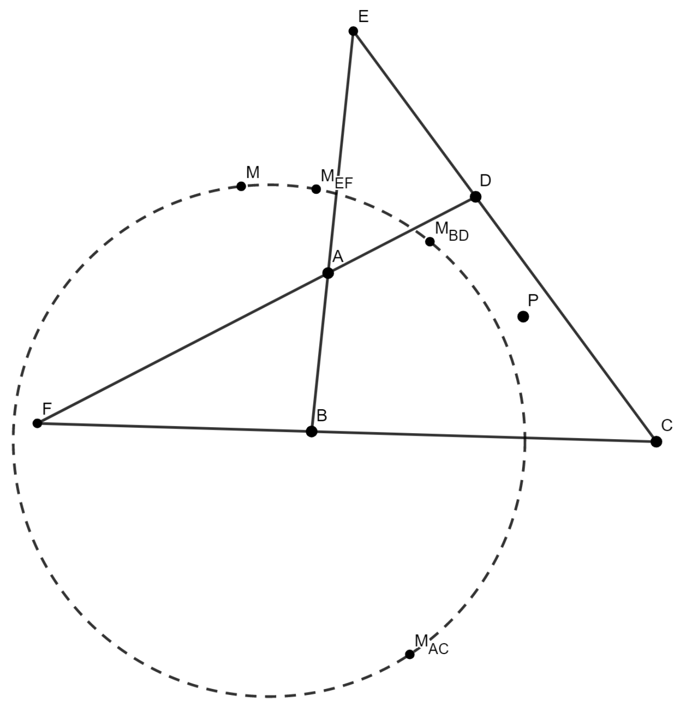


Теперь докажем **Th** используя Лемму 5.1.

Лемма 6.2: (Предлагается читателю доказать это самостоятельно)
Точка P внутри четырёхугольника $ABCD$. Окружности $\odot(ABP)$ и $\odot(CDP)$ пересекаются в точке R, а окружности $\odot(ADP)$ и $\odot(BCP)$ пересекаются в точке S. Окружности $\odot(ABS), \odot(CDS), \odot(ADR), \odot(BCR)$ пересекаются в точке Q. Тогда середины отрезков PQ, RS, AC, BD лежат на одной окружности. (Подсказка: обратите внимания на доказательство **Леммы 2.4**)



Следствие 6.2: (Теорема о четырёх точках Микеля)
Точка P внутри четырёхугольника $ABCD$. Прямые AB и CD пересекаются в точке E, а прямые AD и BC в точке F. Тогда точки Микеля $ABCD(M), PAPC(M_{AC}), PBPD(M_{BD}), PEPF(M_{EF})$ лежат на одной окружности.

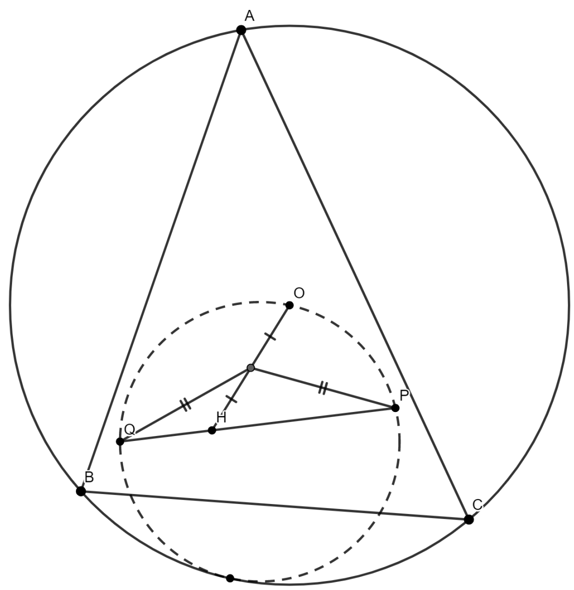


Доказательство:
Инверсия с центром точке P и любого радиуса + гомотетия с центром точке P и коффицентом $1/2$ превращает утверждения в **Лемму 6.2**.
Второе доказательство Th:
Прямые PR и QS пересекаются в точке X, а прямые PS и QR пересекаютсяв точке X'. Тогда широко изветсно, что точки X и X' изогонально сопряжены в треугольнике $\triangle ABC$ (Доказательство можно найти в [2] или [4]). Тогда по **Следствию 6.2** точки Микеля $PRQS, IPIQ, IRIS, IXIX'$ лежат на одной окружности, с другой стороны по **Лемме 5.1** эта окружность совпадает с окружностью $\odot(ABC)$.

7. Прямая PQ проходит через H

Читателям предлагается решить самостоятельно следующую задачу:
Условие:

В треугольнике $\triangle ABC$ O, H - центр описанной окружности и ортоцентр соответственно. Точки $(P, Q)-$ пара изогонального сопряжения в треугольнике $\triangle ABC$. Оказалось, что $H \in PQ$ и середина OH равноудалена от точек P и Q. Докажите, что окружность $\odot(OPQ)$ касается окружности $\odot(ABC)$.



8. Точки Ферма и Аполлония

Читателям предлагается решить самостоятельно следущую задачу:
Условие:
В треугольнике $\triangle ABC$ F_1, F_2, S_1, S_2, O, H - первая точка Ферма, вторая точка Ферма, первая точка Аполлония, вторая точка Аполлония, центр описанной окружности, ортоцентр соответственно. Точка D такова, что $\mathcal{S}_D \perp OH$. Докажите, что окружности $\odot(DF_1S_1), \odot(DF_2S_2), \odot(DOH)$ соосны.

9. Список литературы

[1]− https://artofproblemsolving.com/community/c6h2040256p14426932
Advanced Lemmas in Geometry Fedir Yudin.
[2]− https://geometry.ru/articles.php
[3]− https://www.turgor.ru/lktg/2020/2/index.html.
[4]− https://mccme.ru/free-books/akopyan/Zaslavky-Akopyan.pdf (Геометрические свойство кривых второго порядка A.V. Akopyan,A. A. Zaslavsky)