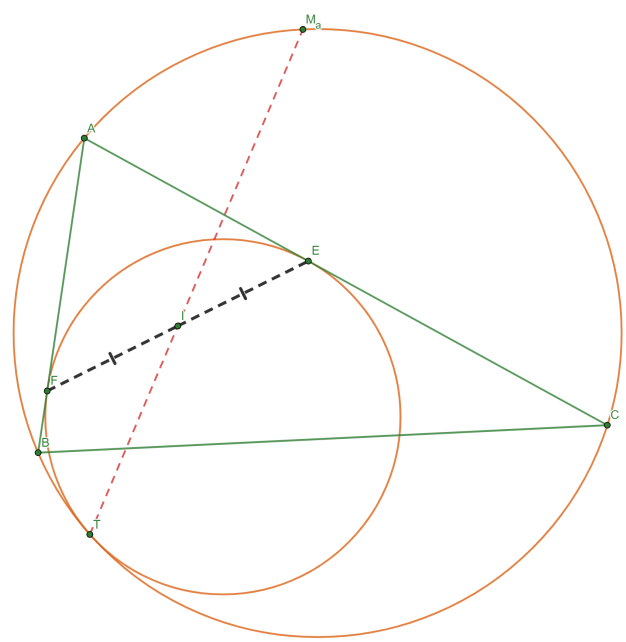
Обобщения леммы Веррьера.

0. Что вообще такое лемма Веррьера?

Далее мы будем считать,что треугольник $\triangle ABC$ остроугольный, а описанную окружность треугольника (или многоугольника) $\triangle XYZ$ будем обозначать $\odot(XYZ)$.

Лемма Веррьера:

Дан треугольник $\triangle ABC$ с центром вписанной окружности I. Окружность w_a касается сторон AB, AC и окружности $\odot(ABC)$ в точках F, E, T соответственно. M_a середина дуги BAC окружности $\odot(ABC)$. Тогда I середина отрезка EF и точки T, I, M_a лежат на одной прямой.

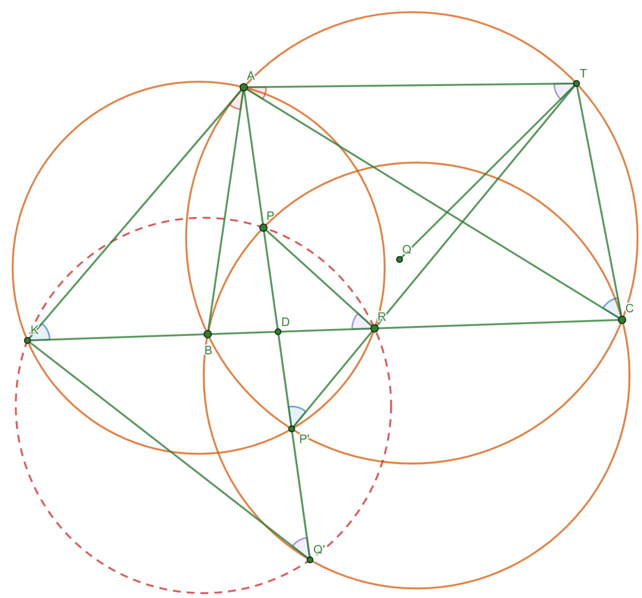


0.5 Подготовительная Лемма:

Лемма: В треугольнике $\triangle ABC$ P, Q изогонально сопряжены. AP повторно пересекает описанную окружность треугольника $\triangle ABC$ в точке P'. $P'R$ повторно пересекает окружность $\odot(ABC)$ в точке T, где R любая точка на прямой BC. Тогда $\angle(PR, BC) = \angle ATQ$.

Доказательство: Точка K на прямой BC такова, что прямые AK и AT симметричны относительно биссектрисы угла A. Пусть Q' повторное пересечение прямой AP и окружности $\odot(PBC)$. => $\angle AQ'B = \angle PCB =$

$\angle QCA$ => $\Delta AQC \sim \Delta AQ'B$ и $\angle KAB = \angle TAC$ => $\Delta ABK \sim \Delta ACT$ => A, K, R, P' - лежат на одной окружности => $\Delta AQ'K \sim \Delta AQT$ => $\angle ATQ = \angle AQ'K$. => Достаточно: $\angle AQ'K = \angle(PR, BC)$ <=> P, R, Q', K - лежат на одной окружности. Пусть AP пересекает BC в D => $DK*DR = DP'*DA = DB*DC = DP*DQ'$.



Также можно узнать больше об этой лемме и порешать задачи в материале [1].

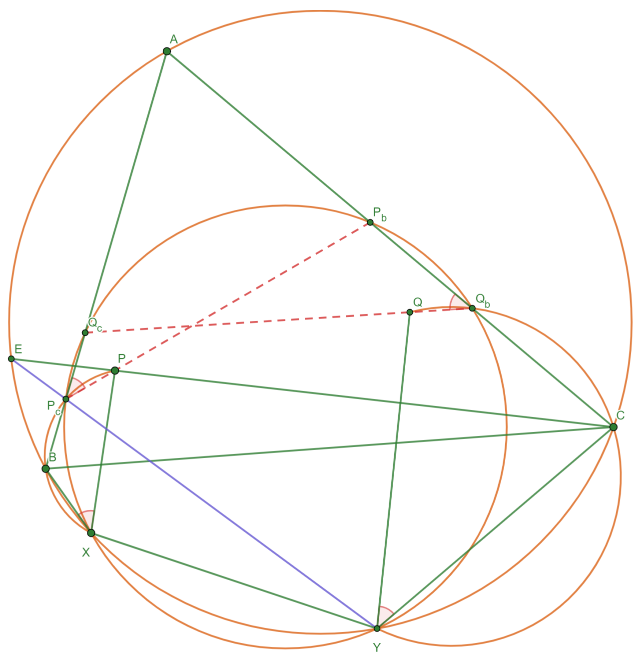
1. Первое обобщение и пары Веррьера:

Обобщение 1.1: В треугольнике $\triangle ABC$ точки P и Q изогонально сопряжены. Точки X, Y выбраны на окружности $\odot(ABC)$ так, что $\angle BXP = \angle CYQ$ (для удобства будем считать,что точки P, Q внутри треугольника $\triangle ABC$, а точки X, Y лежат на меньшой дуге BC). Тогда существуют точки P_b, Q_b на стороне AC и P_c, Q_c на стороне AB такие, что $P \in P_bP_c, Q \in Q_bQ_c$ и точки P_b, P_c, Q_b, Q_c, X, Y лежат на одной окружности. (пару точек X, Y иногда будем называть парой Веррьера для P, Q)

Доказательство:

Пусть P_b, P_c лежат на прямых AC, AB соответственно так, что точки P, P_c, B, X и P, P_b, C, X лежат на одной окружности => $\angle XPP_c = 180 - \angle ABX = \angle ACX = 180 - \angle XPP_b$ => P, P_b, P_c - лежат на одной прямой. Аналогично для точки Q определим Q_b, Q_c. Теперь докажем,что P_b, P_c, Q_b, Q_c, X, Y лежат на одной окружности. $\angle P_bP_cQ_c = \angle BXP = \angle CYQ = \angle Q_cQ_bP_b$ =>

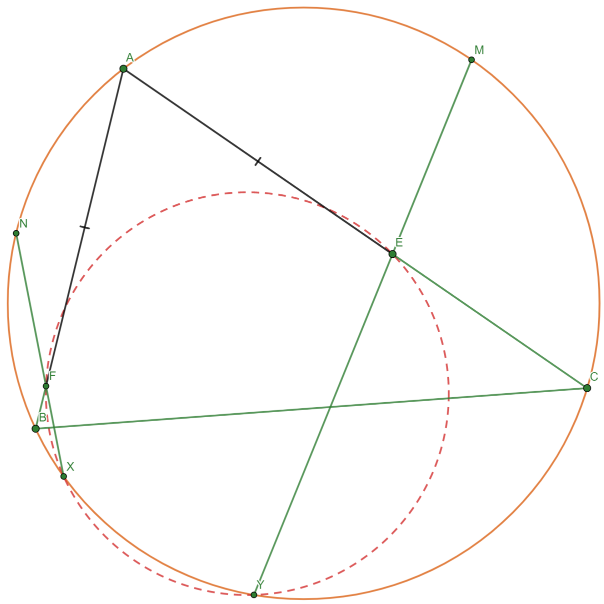
P_b, P_c, Q_b, Q_c - лежат на одной окружности. Пусть CP повторно пересекает окружность $\odot(ABC)$ в точке E. Тогда по **Лемме** E, P_c, Y лежат на одной прямой.=> $\angle Q_cYX = \angle XYC - \angle Q_cYQ - \angle QYC = 180 - \angle XBC - \angle Q_cBQ - \angle BXP = 180 - \angle XBP - \angle BXP = \angle BPX = \angle BP_cX$ => P_c, Q_c, X, Y - лежат на одной окружности. Аналогично P_b, Q_b, X, Y лежат на одной окружности, но прямые XY, P_bQ_b, P_cQ_c не пересекаются в одной точке => P_b, P_c, Q_b, Q_c, X, Y - лежат на одной окружности.



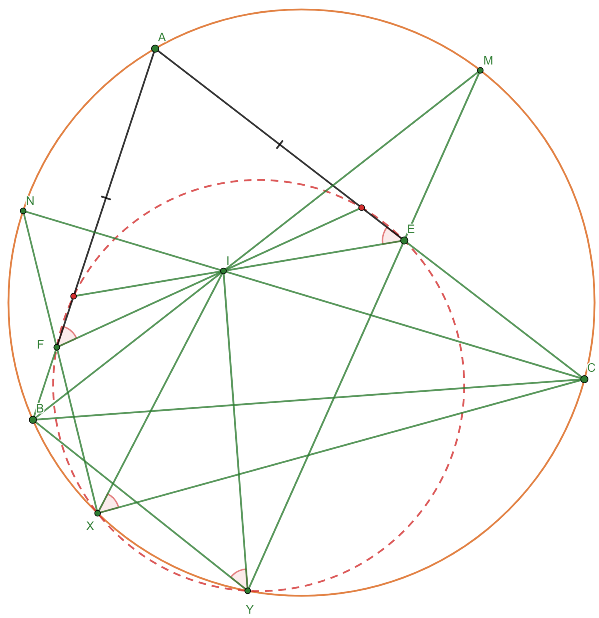
Заметим, что лемма Варрьера получается, если P, Q и X, Y склеиваются. Далее мы расмотрим некоторые частные случаи данного обобщения.

2. Центр вписанной окружности:

Задача с какой-то олимпиады: В остроугольном треугольнике $\triangle ABC$ точки M, N середины меньших дуг AC и AB окружности $\odot(ABC)$. На сторонах AC и AB выбраны точки E, F соответственно так, что $AE = AF$. Прямые ME и NF повторно пересекают окружность $\odot(ABC)$ в точках Y, X. Тогда X, Y, E, F лежат на одной окружности.

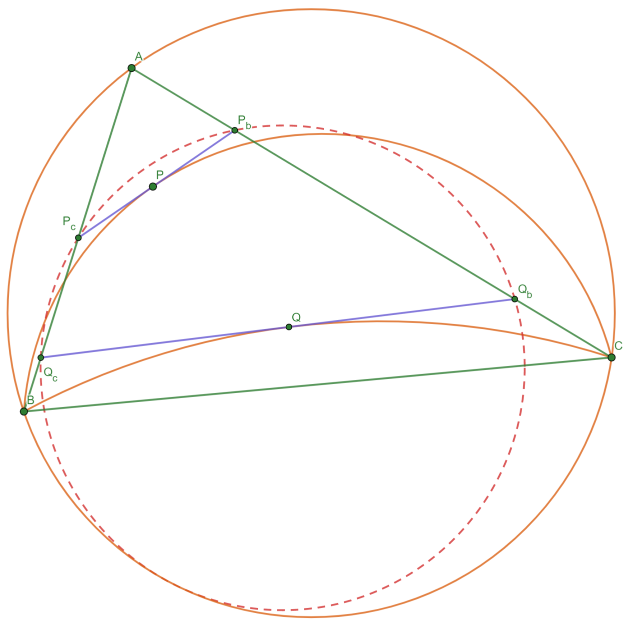


Доказательство: Пусть I центр вписанной окружности треугольника $\triangle ABC$. Тогда по **Лемме** $\angle CXI = \angle AFI = \angle AEI = \angle BYI$, где среднее равенство верно в силу симметрии => X, Y - точки Веррьера для I => мы просто получаем **Обобщение 1.1**, когда P и Q склеились. Также стоит отметить, что пересечение прямых IE, IF со стронами AB и AC лежат на этой окружности.

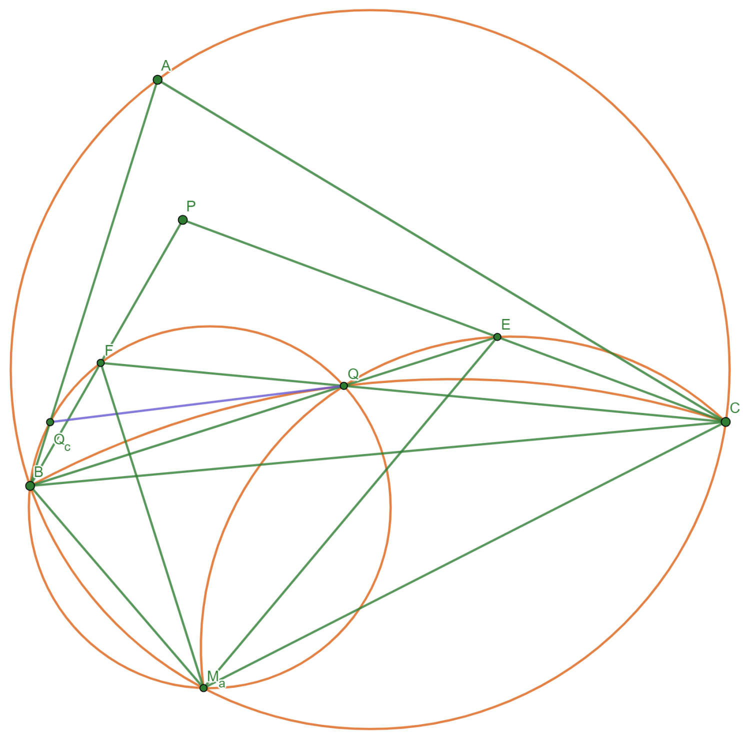


3. Частный случай (Telv Cohl):

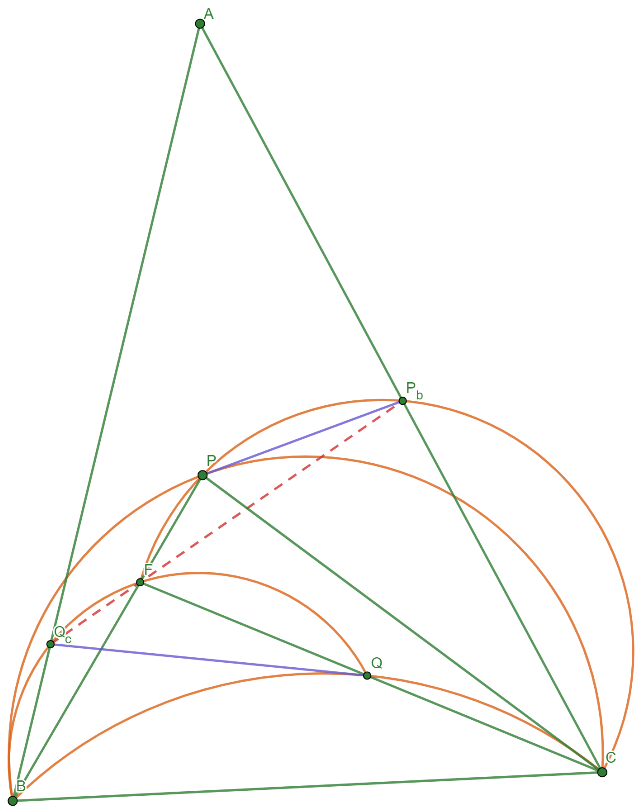
Авторская формулировка задачи:
В треугольнике $\triangle ABC$ точки P, Q изогонально сопряжены. Касательная в точке P к окружности $\odot(PBC)$ пересекает стороны AC, AB в точках P_b, P_c. Касательная в точке Q к окружности $\odot(QBC)$ пересекает стороны AC, AB в точках Q_b, Q_c. Тогда точки P_b, P_c, Q_b, Q_c лежат на одной окружности, которая касается окружности $\odot(ABC)$.(обозначим её Γ_A)



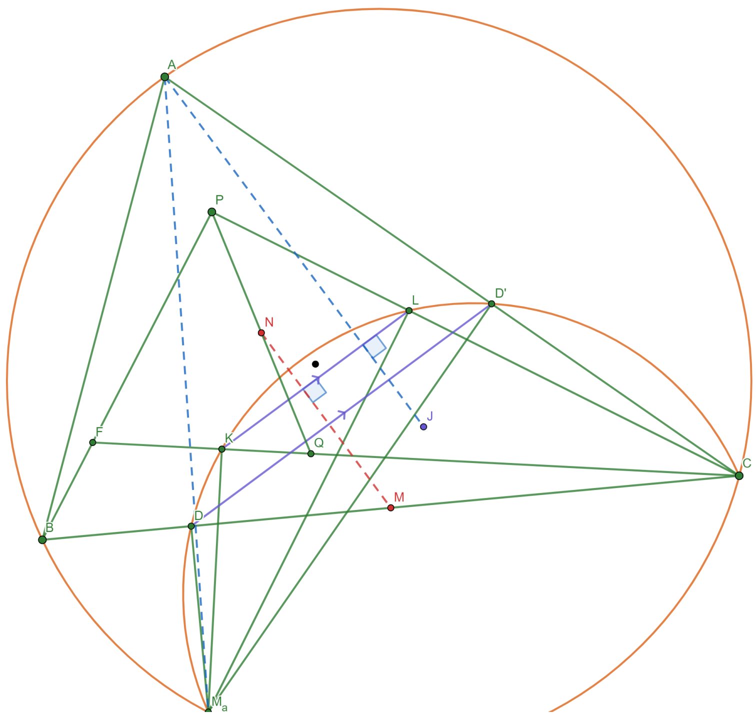
Решение:
Подойдём к задаче с другой строны. Пусть прямые BP и CQ пересекаются в точке F, а прямые CP и BQ пересекаются в точке E => точки E, F изогонально сопряжены в треугольнике $\triangle ABC$. Пусть M_a точка Микеля прямых CP, CQ, BP, BQ. => $\angle BM_aC = \angle CFP + \angle BEP = \angle PBC + \angle PCB + \angle PBA + \angle PCA = 180 - \angle A$ => $M_a \in \odot(ABC)$. Заметим, что $\angle BM_aF = \angle FQB = \angle CQE = \angle CM_aE$ => точки Веррьера склелись для E, F. Тогда по **Обобщению 1.1** точка Q_c должна строится, как пересечение окружности $\odot(M_aBQF)$ и прямой AB => $\angle BQQ_c = \angle BFQ_c = \angle BQF - \angle QBC = \angle QCB$. => QQ_c касается окружности $\odot(QBC)$.



Оказывается у этой конструкции есть много интересных свойсвт.
Свойство 3.1: $F \in P_bQ_c$ и $E \in P_cQ_b$.
Доказательство: Досточно доказать, что $F \in P_bQ_c$. $\angle PFP_b = \angle PCP_b = \angle QCB = \angle BQQ_c = \angle BFQ_c =>P_b, Q_c, F-$ лежат на одной прямой.



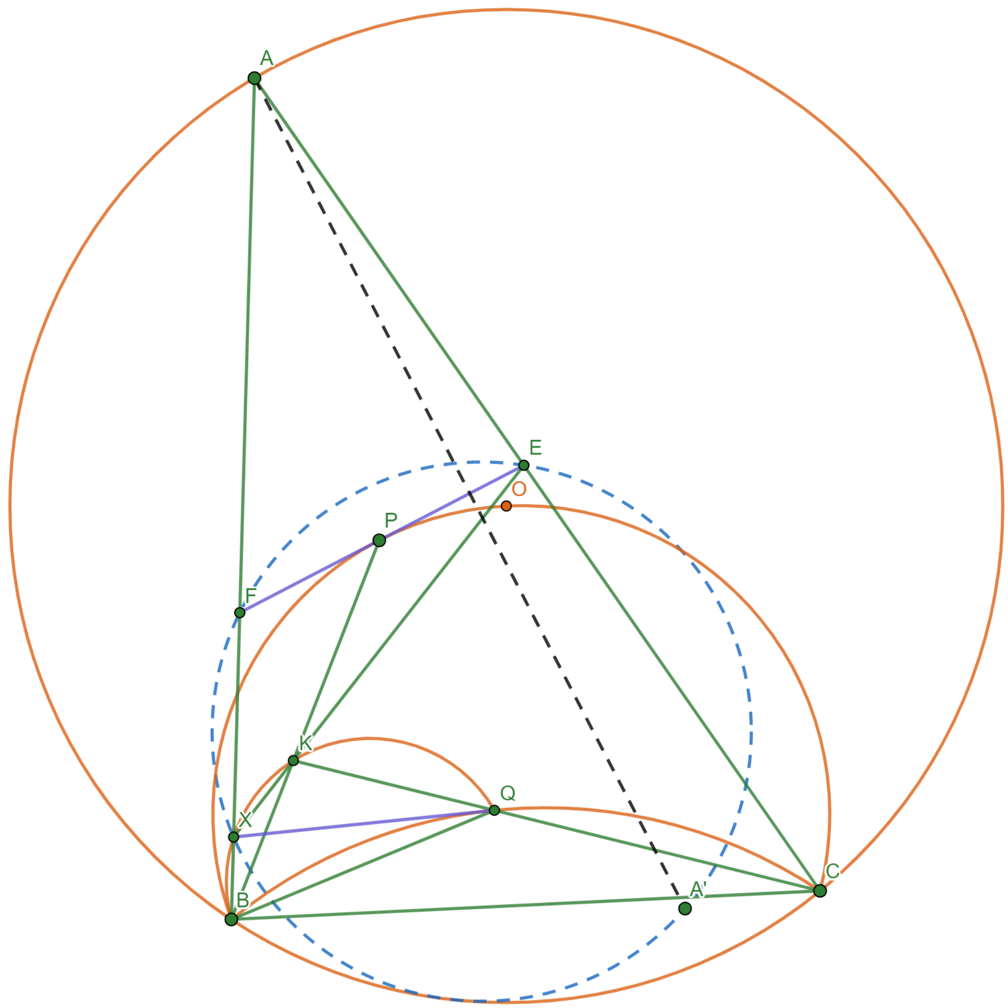
Свойство 3.2:
Определим точки M_b, M_c аналогично. Тогда прямые AM_a, BM_b, CM_c пересекаются в одной точке.
Доказательство:
Пусть M середина BC и N середина PQ. D, D', K, L - основания перпендикуляров из точки M_a на прямые BC, AC, CQ, CP соответственно. => D, D', K, L, M_a, C - лежат на одной окружности => $DK = D'L$ => $DD' \parallel KL$. Заметим, что MN прямая Гаусса, а значит $MN \perp KL$, с другой стороны изогональ AM_a относительно угла $\angle A$ перпендикулярна прямой DD' => изогональ AM_a относительно угла $\angle A \parallel MN$ => изогональ AM_a относительно угла $\angle A$ проходит через образ точки N при гомотетии относительно центра тяжести с коффицентом -2. (Обозначим J) => прямые AM_a, BM_b, CM_c проходят через точку, которая изогонально сопряжена точке J в треугольнике $\triangle ABC$. (обозначим J')



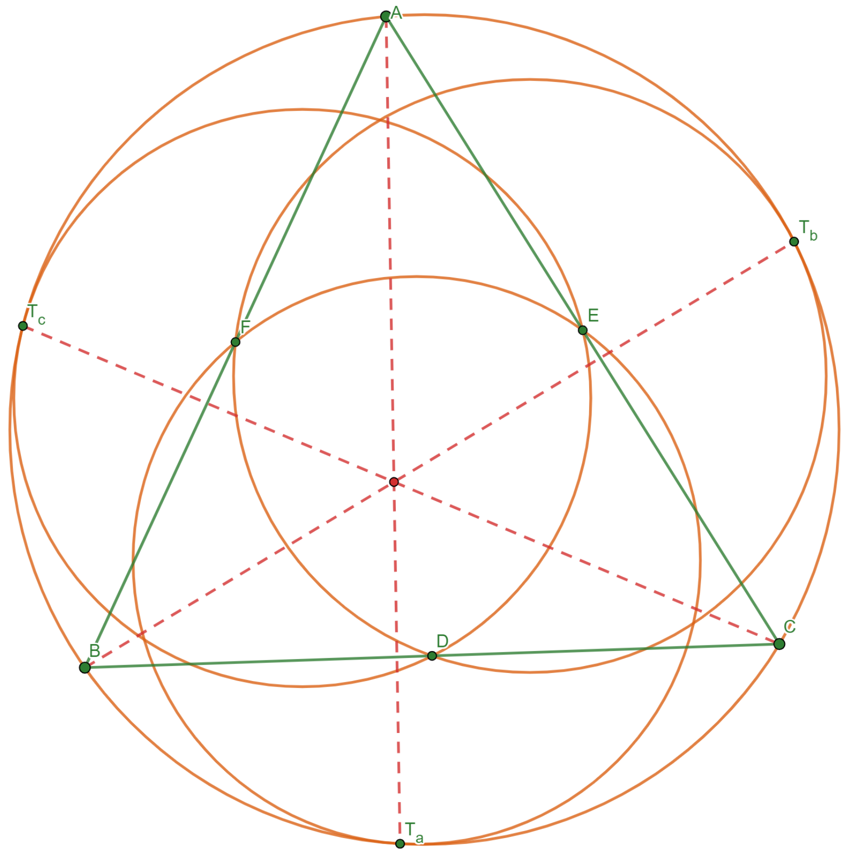
Следующее свойство предлагается читателю доказать самостоятельно. **Свойство 3.3:** Пусть O_a цент окружности Γ_A. Точки O_b, O_c определяются аналогично. Тогда прямые AO_a, BO_c, CO_c, OJ', где O центр окружности $\odot(ABC)$.

4. Задачи по разделу 3

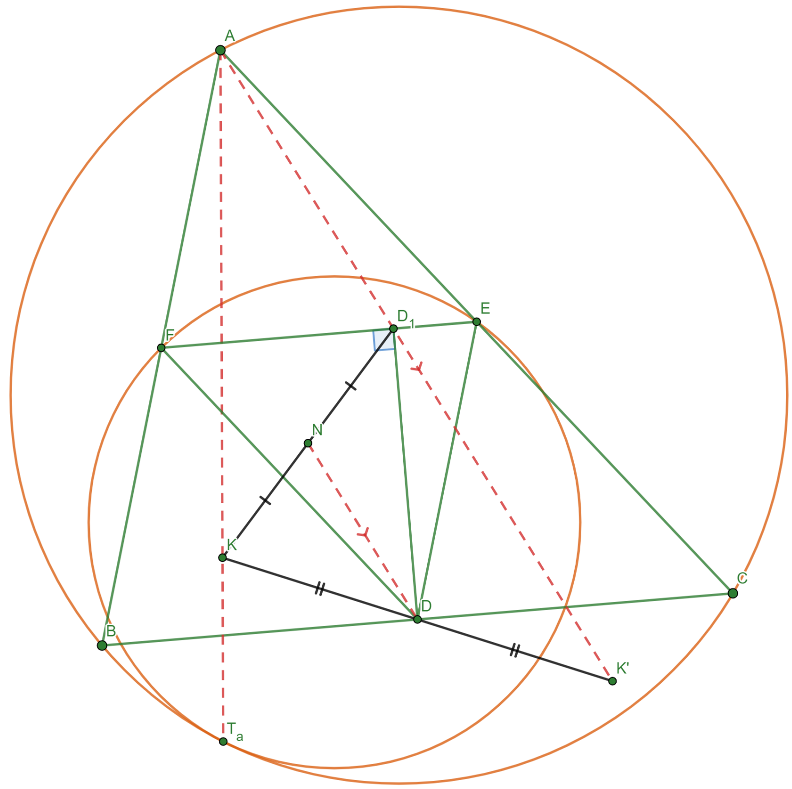
Здесь мы разбирём две задачи с помощью результатов раздела 3.
Задача 1: В остроугольном треугольнике $\triangle ABC$ O - центр описанной окружности. Точка $P \in \odot(OBC)$. Касательная в точке P к окружности $\odot(OPBC)$ пересекает стороны AC, AB в точках E, F соответственно. A' симметрична точке A относительно EF. Тогда окружности $\odot(A'EF)$ и $\odot(ABC)$ касаются. (Serbia National Olympiad 2016, day 1, P3)
Решение: Пусть Q изогонально сопряжена точке P в треугольнике $\triangle ABC =>$ $\angle BQC = 180 - \angle A$. Прямые CQ и BP пересекаются в точке K. Точка X выбрана на стороне AB так,что XQ касается окружности $\odot(BQC) =>$ достаточно доказать, что $\angle FXE = \angle A$, но по **Свойству 3.1** $K, X, E-$ лежат на одной прямой $=> \angle FXE = \angle FXK = \angle BQK = \angle A$.



Задача 2: D, E, F - середины сторон BC, AC, AB остроугольного треугольника $\triangle ABC$. Ω_a - окружность, которая проходит через E, F и касается меньшой дуги BC окружности $\odot(ABC)$ в точке T_a. Аналогично определите окружности Ω_b, Ω_c и точки T_b, T_c. Тогда прямые AT_a, BT_b, CT_c пересекаются в одной точке. (Ismail Isaev and Mikhail Isaev. по мотивам IMO 2011 Short-list G4) Данная задача хорошо решается используя задачу IMO 2011 Short-list G4, но мы пойдём совсем другим путём.



Решение: Пусть D_1 основание перпендикуляра из точки D на прямую EF. Аналогично определим E_1, F_1. Пусть K изогонально сопряжена точке D_1 в треугольнике $\triangle ABC$, а K' симметрична точке K относительно D. Тогда $\angle ABK = \angle ACK =>$ по Лемме об изогоналях относительно угла $\angle A$ и пар точек $(B, C), (\infty_{KB}, \infty_{KC})$ прямые AK и AK' изогонали относительно угла $\angle A => A, K', D_1-$ лежат на одной прямой. Пусть N середина $D_1K => NM \parallel AD_1 =>$ по **Свойству 3.2** $A, T_a, K-$ лежат на одной прямой. => Досточно доказать, что прямые AD_1, BE_1, CF_1 пересекаются в одной точке, но прямая AD_1 это образ прямой, которая соединяет середину EF и середину DD_1, а она проходит через точку Лемуана треугольника $\triangle DEF$. (это утвреждение считается широко известным. Доказательство можно найти в [3]), из этого следует пересечение прямых AD_1, BE_1, CF_1 так, как серединный треугольник для $\triangle DEF$ гомотетичен треугольнику $\triangle ABC$

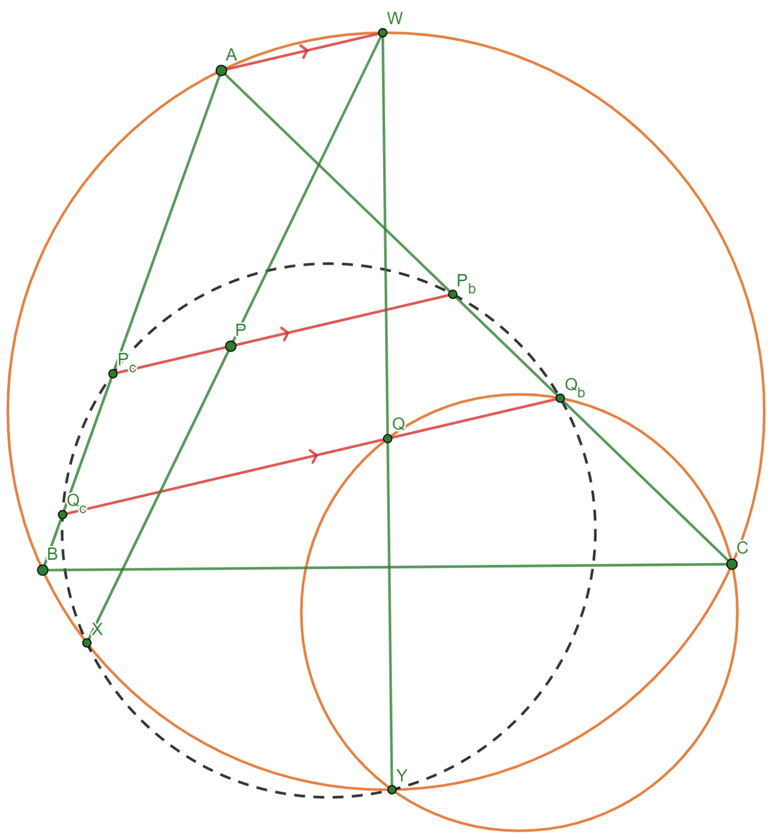


5. Середина большой дуги (Обобщение П.Бибикова)

Об этом обобщении в 2020г была написана статья, которую можно найти по ссылке [2]. Данное обобщение придумал Павел Бибиков.

Условия задачи: Точки P, Q изогонально сопряжены в треугольнике $\triangle ABC$. W - середина дуги BAC окружности $\odot(ABC)$. Прямая, которая проходит через точку P и параллельна AW пересекает стороны AB и AC в точках P_c, P_b соответственно. Прямая, которая проходит через точку Q и параллельна AW пересекает стороны AB и AC в точках Q_c, Q_b соответственно. Прямые WP и WQ повторно пересекают окружность $\odot(ABC)$ в точках X, Y соответственно. Тогда точки P_b, P_c, Q_b, Q_c, X, Y лежат на одной окружности.

Доказательство: Заметим, что $\angle BXP = 90 - \angle A = \angle CYQ => X, Y$ точки Веррьера для P, Q. При этом $\angle AQ_bQ = 90 - \angle A = \angle CYQ => C, Q_b, Q, Y$ - лежат на одной окружности. => по **обобщению 1.1** точки P_b, P_c, Q_b, Q_c, X, Y лежат на одной окружности.

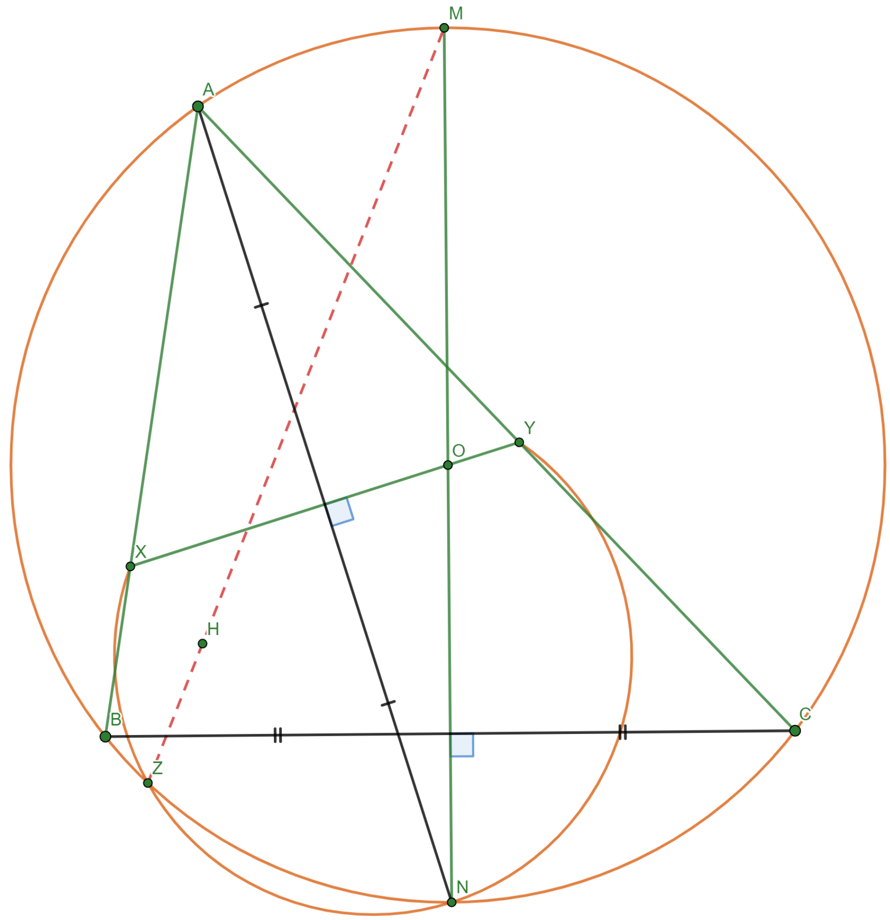


В 6 разделе мы приведём несколько задач, которые решаются с помощью этого обобщения.

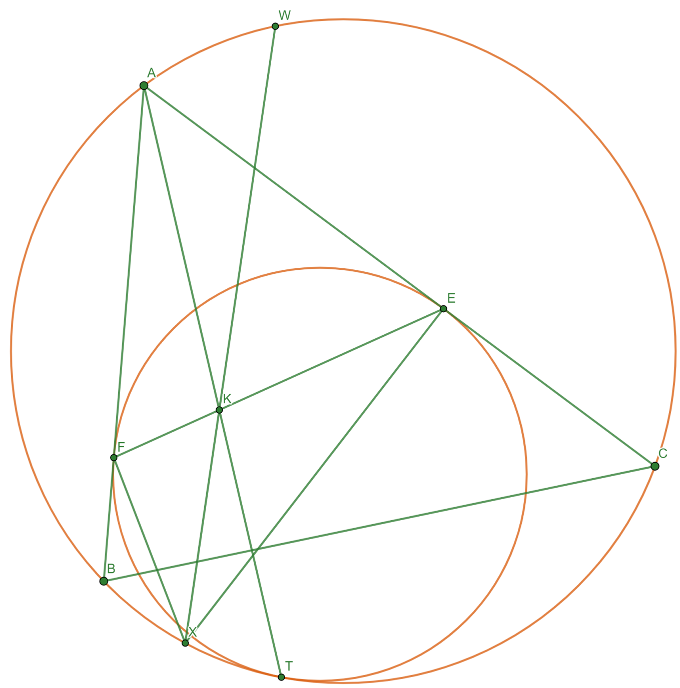
6. Задачи по разделу 5.

Задача 1: O, H - центр описанной окружности и ортоцентр остроугольного треугольника $\triangle ABC$. M, N - середина дуги BAC и середины меньшой дуги BC соответственно. Серединный перпендикуляр к AN пересекает стороны AC и AB в точках X, Y. Окружность $\odot(XYN)$ повторно пересекает окружность $\odot(ABC)$ в точке Z. Тогда M, H, Z лежат на одной прямой. (Первый раунд польской национальной олимпиады 2022. Задача 10.)

Решение: Надо просто применить обобщение из раздела 5 для точек O, H.



Задача 2: Окружность w касается сторон AC, AB и описанной окружности треугольника $\triangle ABC$ в точках E, F, T. Прямые AT пересекает прямую EF в точке K. Точка W середина дуги BAC окружности $\odot(ABC)$. Прямая WK повторно пересекает окружность $\odot(ABC)$ в точке X. Тогда XK биссектриса угла $\angle EXF$.



Читателям предлагается решить эту задачу самостоятельно.

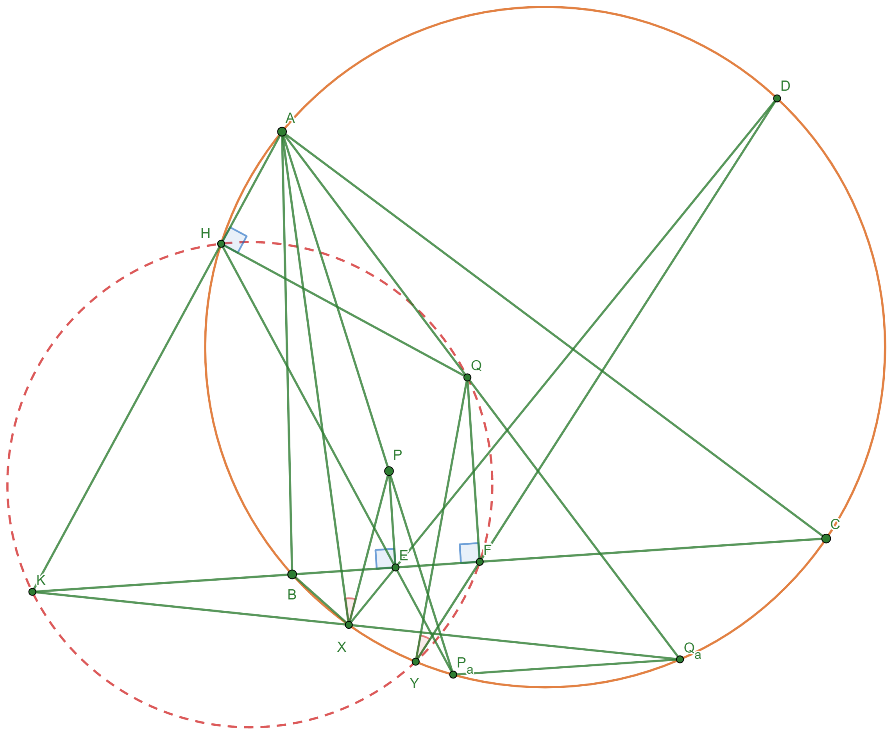
7. Ещё одна пара Веррьера и красивая задача:

Давайте обобщим ещё одно утверждение в конструкции из леммы Веррьера.

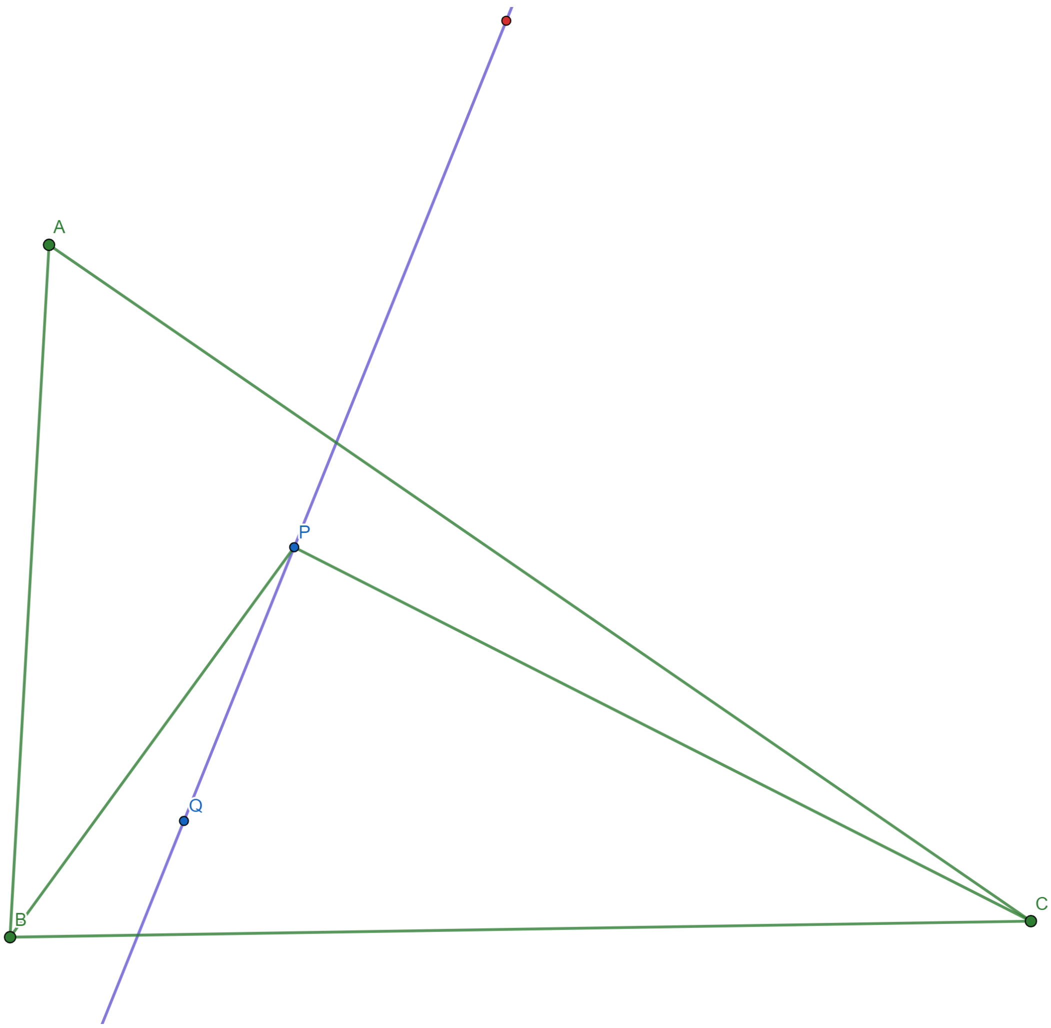
Исходное утверждение: Вписанная окружность треугольника $\triangle ABC$ касается стороны BC в точке D. T точка касания полувписанной окружности с дугой BC окружности $\odot(ABC)$. Точка A' такова, что $A' \in \odot(ABC)$ и $AA' \parallel BC$. Тогда A', D, T - лежат на одной прямой.

Обобщение утверждение: Точки P, Q изогонально сопряжены в треугольнике $\triangle ABC$. Точки E, F основания перпендикуляров на сторону BC из точек P, Q соответственно. Точка A' такова, что $A' \in \odot(ABC)$ и $AA' \parallel BC$. Прямые $A'E, A'F$ повторно пересекают окружность $\odot(ABC)$ в точках X, Y соотвественно. Тогда X, Y пара точек Веррьера, то есть $\angle BPX = \angle CYQ$.

Доказательство: Прямые AP и AQ повторно пересекают окружность $\odot(ABC)$ в точках P_a, Q_a соответственно. Достаточно доказать, что $\angle PXA = \angle QYF$. Прямые Q_aX и BC пересекаются в точке K, а прямая AK повторно пересекает окружность $\odot(ABC)$ в точке H. Тогда из теоремы Паскаля для P_aQ_aXDAH следует, что $E \in HP_a$ => по **Лемме** $\angle QHA = 90^\circ$ => $K, H, Q, F-$ лежат на одной окружности, с другой стороны $\angle KHY = \angle ADY = \angle KFY$ => $K, H, F, Y-$ лежат на одной окружности. => K, H, F, Y, Q - лежат на одной окружности. => $\angle QYF = \angle QKF = \angle AXP$, где последнее равенство верно в силу **Леммы**.



Красивая задача: Точка P выбирается внутри треугольника $\triangle ABC$ так, что $\angle PBC + \angle PCA = \angle PCB + \angle PBA$. Точка Q изогонально сопряжена точке P. Докажите, что прямая PQ проходит через фиксированную точку. Читателю предлагается решить эту задачу самостоятельно.



Список литературы

[1] https://drive.google.com/file/d/108BH0fZRxTVxALfe405DPUzqSLodGeaJ/view?usp=sharing
[2] https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paperjrnid=mppaperid=980option$_{l}ang =$
rus
[3]$https : //mccme.ru/free - books/prasolov/planim/gl5sol.htmref - 5.149$