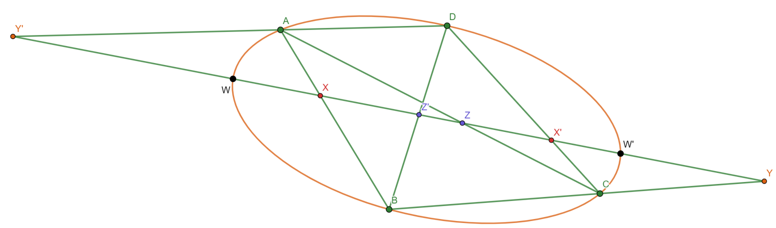
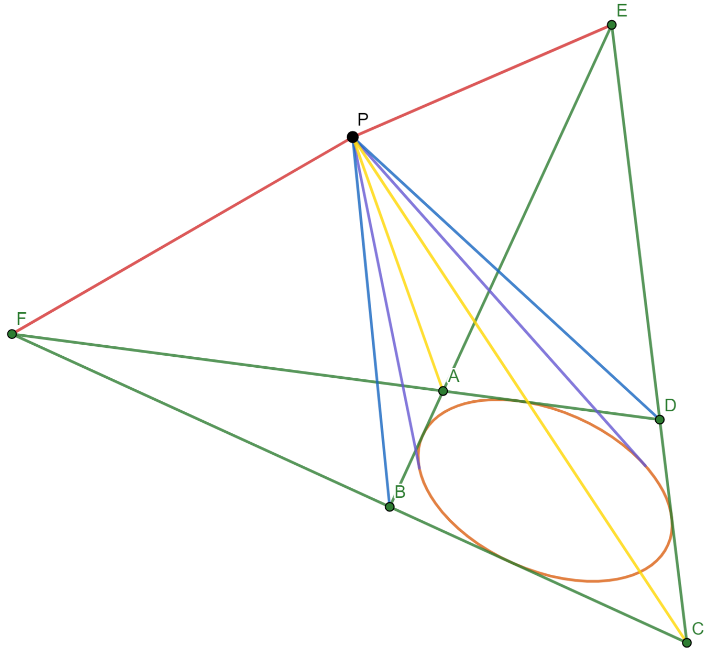
Теорема Дезарга об инволюции для вписанных и вневписанных окружностей треугольника

0. Что нужно знать

ТДИ:
Даны четыре точки A, B, C, D общего положения и пряма l, не проходящая через них. Пусть l пересекает прямые AB, CD, BC, AD, AC, BD в точках X, X', Y, Y', Z, Z' соответственно и конику, проходящую через A, B, C, D в точках W, W'. Тогда на прямой l существует проективная инволюция $f : X \leftrightarrow X', Y \leftrightarrow Y', Z \leftrightarrow Z', W \leftrightarrow W'$.



ТДИ, двойственная: В четырёхугольник $ABCD$ вписана коника w. Прямые AB и CD пересекаются в точке E, а прямые AD и BC в точке F. Точка P выбрана на плоскости. Тогда существует проективная инволюция, которая меняет местами пары прямых $PA \leftrightarrow PC, PB \leftrightarrow PD, PE \leftrightarrow PF$ и касательные из точки P к w.



Если вы незнакомы с данной теоремой вы можете ознакомиться с ней на википедии или прочитать статью [1]. Также важно знать, что все проективные инволюции на прямой - это инверсия с некоторым центром + (возможно) симметрия.

1. Известные задачи и обозначения

Во всех задачах будем использовать следующие обозначения: (Будем считать, что треугольник $\triangle ABC$ остроугольный) $\odot(ABC)$ - описанная окружность треугольника $\triangle ABC$

O - центр окружности $\odot(ABC)$

H - ортоцент треугольника $\triangle ABC$, а O_9 центр окружности девяти точек.

w - вписанная окружность треугольника $\triangle ABC$.
w_a, w_b, w_c - вневписанные окружности $\triangle ABC$, которые касаются сторон BC, AC, AB соответственно.
$\Gamma_a, \Gamma_b, \Gamma_c$ - полувписанные окружности треугольника $\triangle ABC$, которые касаются дуг BC, AC, AB соответственно.
T_a, T_b, T_c - точки касания окружности $\odot(ABC)$ с окружностями $\Gamma_a, \Gamma_b, \Gamma_c$ соответственно.
A', B', C' - выбраны на окружности $\odot(ABC)$ так, что $AA' \parallel BC, BB' \parallel AC, CC' \parallel AB$.
I, I_a, I_b, I_c - центры окружностей w, w_a, w_b, w_c соответственно.
M_a, M_b, M_c - середины меньших дуг BC, AC, AB окружности $\odot(ABC)$ соответственно
W_a, W_b, W_c - середины больших дуг BC, AC, AB окружности $\odot(ABC)$ соответственно

Ниже будут приведены задачи, которые будут использоваться для доказательств основных результатов.
0. Теорема Понселе для треугольника: На окружности $\odot(ABC)$ выбрана точка D. Касательные из точки D к w пересекают повторно окружность $\odot(ABC)$ в точках E, F. Тогда прямая EF касается w. (Данная теорема также верна для окружностей w_a, w_b, w_c и вообще для любой коники, которая касается сторон треугольника $\triangle ABC$)
Если вы хотите узнать доказательство и узнать больше об этой теореме рекомендуется прочитать несколько статей на эту тему на сайте [2].
Задача 1.1:
В треугольнике $\triangle ABC$ AD, BE, CF - высоты. Прямые EF, DF, DE пересекают прямые BC, AC, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Тогда A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой, которая перпендикулярна OH.
Доказательство:
Заметим, что точки B, C, E, F лежат на одной окружности => $A_1B * A_1C = A_1E * A_1F$ => степени точки A_1 относительно окружностей $\odot(DEF)$ и $\odot(ABC)$ равны => A_1 лежит на радикальной оси этих окружностей. Аналогично для точек B_1, C_1. => точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой, которая перпендикулярна OO_9, а она совпадает с прямой OH.
Задача 1.2:
В треугольнике $\triangle ABC$ AD, BE, CF - внешние биссектрисы углов $\angle A, \angle B, \angle C$ соответственно. Тогда точки D, E, F лежат на одной прямой и эта прямая перпендикулярна прямой OI.
Доказательство:
Примените **Задачу 1.1** для треугольника $\triangle I_aI_bI_c$.
Задача 2:
В треугольнике $\triangle ABC$ BE, CF - биссектрисы. Тогда $EF \perp OI_a$.
Доказательство:
На этот раз надо применить **Задачу 1.1** для треугольника $\triangle I_BI_CI$.
Следствие:
Общие внешние касательные к окружностям w_a и $\odot(ABC)$ касаются окруж-

ности $\odot(ABC)$ в точках P_a, Q_a. Тогда точки P_a, Q_a, E, F лежат на одной прямой. (Сохраним обозначения для точек P_a, Q_a и будем считать, что P_a лежит на меньшой дуге AC, а Q_a на меньшой дуге AB. Данные обозначения мы будем использозовать в разделе 3)

Задача 3:
D - точка касания окружности w_a и стороны BC. Тогда AD и AT_a изогонали (прямые симметричные относительно биссектрисы) относительно угла $\angle A$.

Доказательство:
Сделаем инверсию с центром в точке A и радиусом $\sqrt{AB * AC}$ и симметрию относительно биссектрисы $\angle A$. Тогда прямая BC перейдёт в окружность $\odot(ABC)$ => Окружность w_a перейдёт в окружность Γ_a => Точка D перейдёт в T_a из этого следует изогональность.

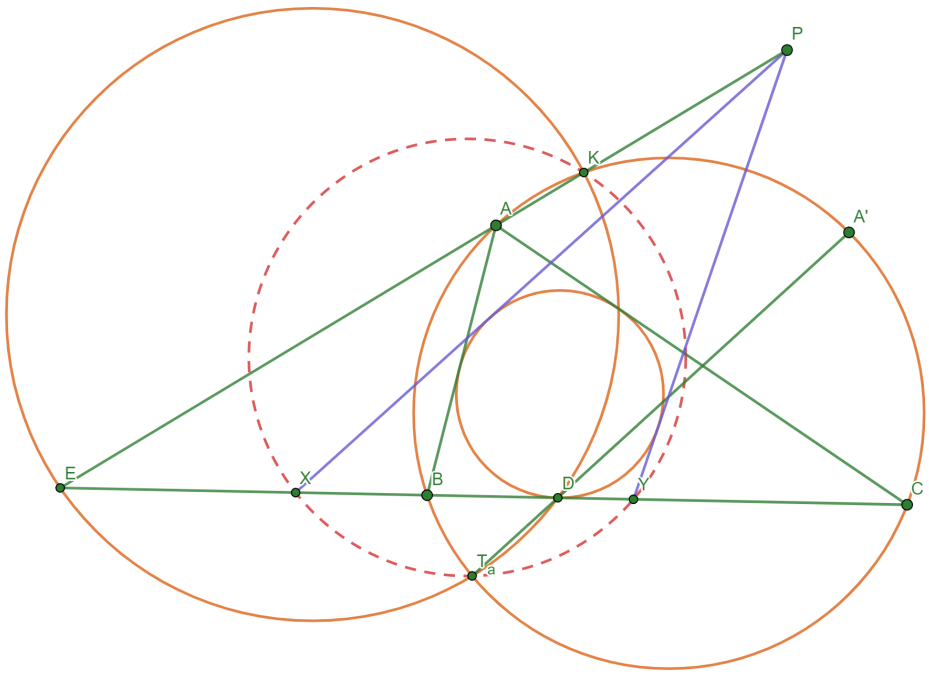
Задача 4:
Окружность w касается стороны BC в точке D. Тогда A', D, T_a лежат на одной прямой.

Доказательство:
Заметим,что точки A и A' симметричны относительно серединного перпендикуляра к BC. Тогда применяя **Задачу 3** получаем, что $A'T_A$ нагелиана в треугольнике $\triangle A'BC$, с другой стороны $A'D$ тоже нагелина так, как точки касания вписанной и вневписанной окружности симметричны относительно середины BC.
Читателю предлагается запомнить данные утверждения потому, что дальше мы будем их использовать в разных формах без упоминаний.

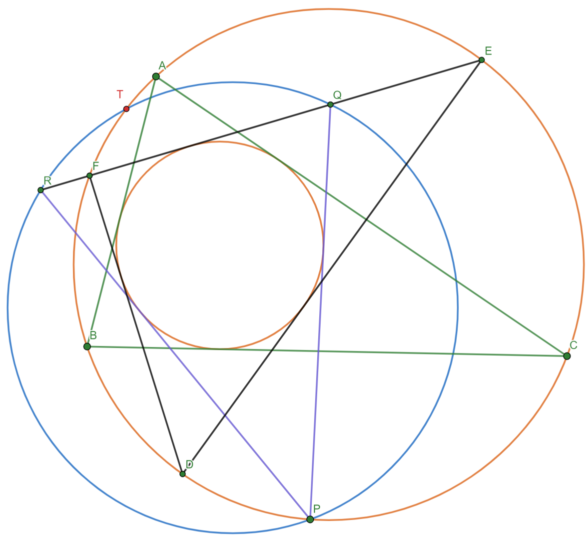
2. ТДИ и вписанная окружность

Главная задача:
На плоскости выбрана точка P. Касательные к w из точки P пересекают BC в точках X, Y. Прямая AP пересекает повторно окружность $\odot(ABC)$ в точке K. Тогда точки K, X, Y, T_a лежат на одной окружности.

Доказательство:
Пусть D точка касания BC с окружностью w. Прямая AP пересекает BC в точке E. => $\angle EDT_a = \angle AA'T_a = \angle AKT_a$ => K, E, D, T_a лежат на одной окружности. Тогда по ТДИ (двойственной) для $ABDC$ и точки P существует инволюция, которая меняет прямые $PA \leftrightarrow PD, PB \leftrightarrow PC, PX \leftrightarrow PY$ после проекции на прямую BC мы получаем, что $(B, C), (A, D), (X, Y)$ пары инволюции => окружности $\odot(KBC), \odot(KXY), \odot(KED)$ пересекаются в одной точке => $T_a \in \odot(KXY)$.



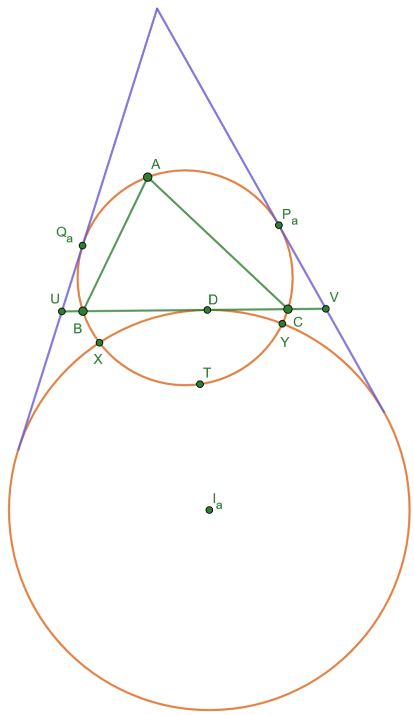
Почти обобщение главной задачи:
Прямая l касается окружности w. Точка P двигается по окружности $\odot(ABC)$. Касательные из точки P к w пересекают l в точках Q, R. Тогда окружность $\odot(PQR)$ проходит через фиксированную точку.
Доказательство:
Прямая l пересекает окружность $\odot(ABC)$ в точках E, F. Тогда по теореме Понселе существует точка $D \in \odot(ABC)$ такая, что в треугольнике $\triangle DEF$ w вписанная окружность. => по **Главной Задаче** окружность $\odot(PQR)$ проходит через точку касания полувписанной окружности треугольника $\triangle DEF$ и окружности $\odot(ABC)$.



Следствие:
Если $l \parallel BC \Rightarrow A \in \odot(PQR)$. (это проверяется, если точку P увести в A)
Перед прочтением третьего раздела стоит понимать, что некоторые утверждения верны и для вневписанных окружностей!

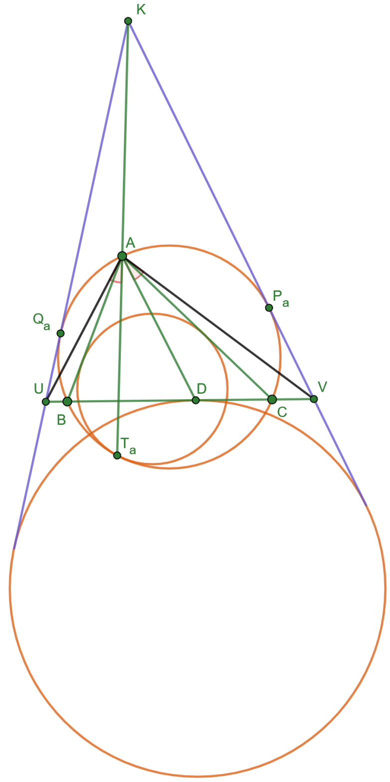
3. Общие касательные к описанной и вневписаной окружности:

Основная конструкция:
Прямые l_b, l_c общие внешние касательные к окружности $\odot(ABC)$ и w_a при этом $P_a \in l_b, Q_a \in l_c$. Окружности $\odot(ABC)$ и w_a пересекаются в точках X, Y и отрезки Q_AY и P_AX пересекаются. Прямые l_b, l_c пересекают BC в точках V, U соответственно. Окружность w_a касается стороны BC в точке D. T - точка касания полувневписанной окружности треугольника $\triangle ABC$, которая касается дуги BC окружности $\odot(ABC)$.

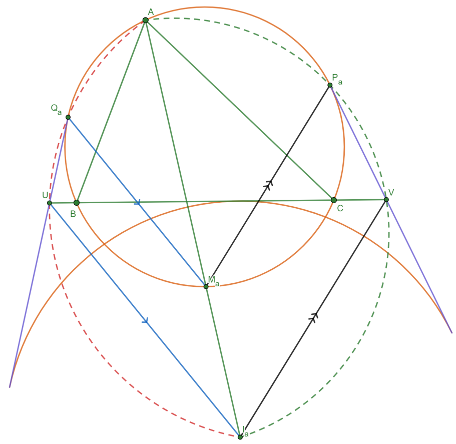


Задача 3.1: Прямые AU и AV изогонали относительно угла $\angle A$. (Serbian MO 2017 P6) Приведём 2 решения для этой задачи.

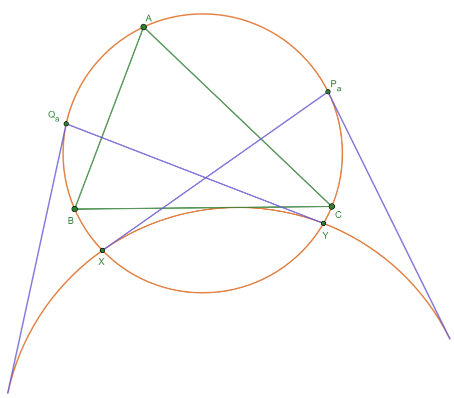
Решение 1: Прямые l_b и l_c пересекаются в точке K. Тогда по теореме Монжа для окружностей $\Gamma_a, w_a, \odot(ABC)$, точки A, K, T_a лежат на одной прямой. По ТДИ(двойственной) существует инволюция, которая меняет местами прямые $KA \leftrightarrow KD, KB \leftrightarrow KC, KU \leftrightarrow KV$ после проекции на прямую BC мы получаем, что $(U, V), (B, C), (D, AT_a \cap BC)$ пары точек инволюции, с другой стороны эта инволюция совпадает по двум последним парам с симметрией относительно угла $\angle A =>$ AU, AV, также симметричны относительно биссектрисы угла $\angle A$.



Решение 2: Так как касательная к окружности $\odot(ABC)$ из точки M_a параллельна BC => $M_aQ_a \parallel I_aU$ и $M_aP_a \parallel I_aV$ => точки A, I_a, U, Q_a и A, I_a, V, P_a лежат на одной окружности => $\angle UAI_a = \angle UQ_aI_a = \angle VP_aI_a = \angle VAI_a$, где второе равенство верно в силу симметрии.

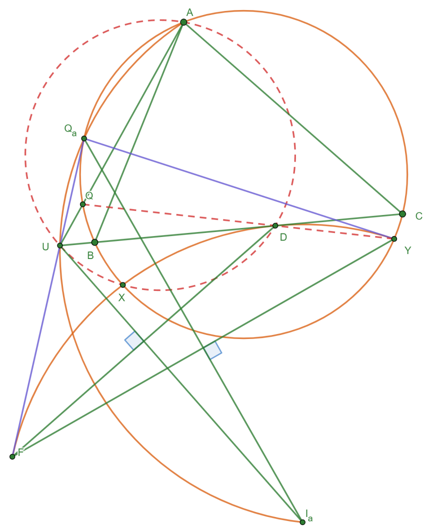


Задача 3.2: Прямые Q_aY и P_aX касаются окружности w_a.
Доказательство: Примените теорему Понселе для точек Q_a и P_a.

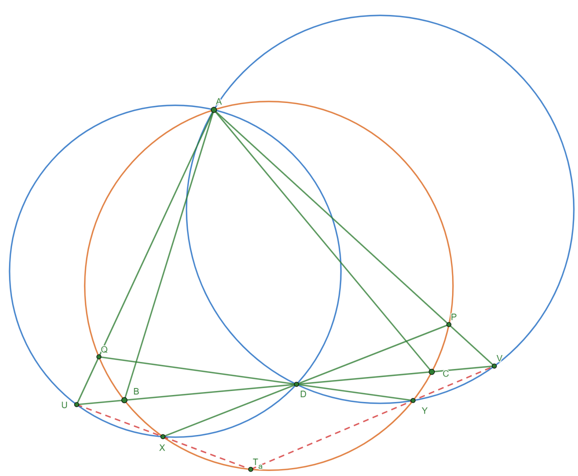


Задача 3.3: Прямые AU, AV повторно пересекают окружность $\odot(ABC)$ в точках Q, P соответственно. Тогда точки X, D, P и Y, D, Q лежат на одной прямой, а точки A, X, D, U и A, Y, D, V лежат на одной окружности.
Доказательство: Достаточно доказать, что Y, D, Q лежат на одной прямой и A, X, D, U лежат на одной окружности. Пусть l_c касается w_a в точке F. Заметим, что $\angle UAQ_a = \angle Q_aI_aU = \angle(Q_aI_a, I_aU) = \angle(\perp Q_aI_a, \perp I_aU) = \angle DFY = \angle Q_aYD$ => Y, Q, D - лежат на одной прямой => $\angle UDX =$

$\angle QYX = \angle XAU \Rightarrow A, X, D, U-$ лежат на одной окружности.



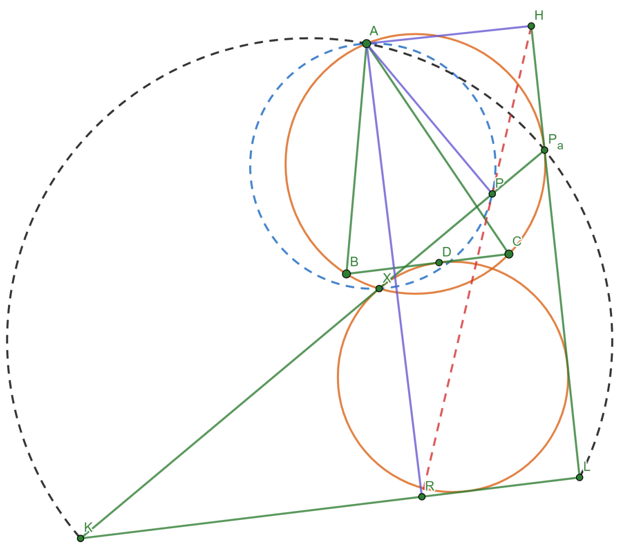
Задача 3.4: Прямые UX и VY пересекаются в точке T_a.
Доказательство: Пусть прямые AV, AP повторно пересекают окружность $\odot(ABC)$ в точках P, Q соответственно. Тогда по **Задаче 3.3** точки X, D, P лежат на одной прямой и X, A, D, U лежат на одной окружности $\Rightarrow \angle T_aXP = \angle T_aAV = \angle UAD = 180 - \angle UXD \Rightarrow T_A, X, U-$ лежат на одной прямой. Аналогично T_a, Y, V лежат на одной прямой.



Задача 3.5: Точки P, Q основание перпендикуляров из точки A на прямые XP_a и YQ_a соответственно. Касательные в точках P и Q к окружностям

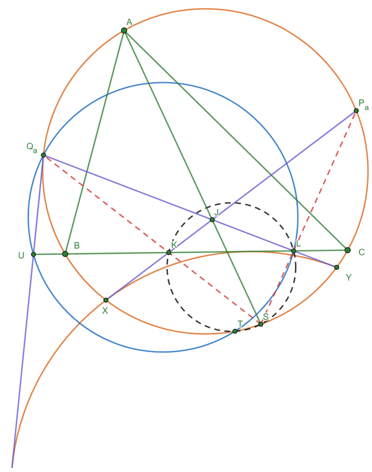
$\odot(APX)$ и $\odot(AQY)$ пересекаются в точке R. Тогда $AR \perp BC$. (IMO Shortlist 2021 G8)

Доказательство: Пусть l касательная к w_a, которая $\parallel BC$, а R' основание перпендикуляра из точки A на прямую l. Прямые l_b и P_AX пересекают l в точках L, K соответственно. H основание перпендикуляра из точки A на прямую l_b. Тогда по **Следствию** $A \in \odot(P_AKL)$ => по прямой симсона точки P, R, H лежат на одной прямой => $\angle APH = \angle AP_aH = \angle AXP_a$ => прямая $R'P$ касается окружности $\odot(APX)$ => $R = R'$.



Задача 3.6: Прямые P_aX и Q_aY пересекаются в точке J и пересекают прямую BC в точках K, L соответственно. Тогда прямые AJ, P_aL, Q_aK пересекаются на окружности $\odot(ABC)$.

Доказательство: Прямая AJ пересекает повторно $\odot(ABC)$ в точке S. Тогда по **главной задаче** для точек Q_a и J точки Q_a, U, L, T и S, T, K, L лежат на одной окружности => $\angle UQ_aT = \angle TLK = \angle TSK$ => Q_a, K, S - лежат на одной окружности. Аналогично S, L, P_a лежат на одной прямой.



4. Список литературы:

[1] - https://artofproblemsolving.com/community/c6h1509866
[2] - https://www.geometry.ru/