Вспомогательные квадраты

Е.БАКАЕВ, А.БЛИНКОВ

В МАТЕМАТИКЕ ВСЕГДА ИНТЕРЕСНО НАХОДИТЬ КАКИЕ-ТО общие закономерности при решении, казалось бы, не очень похожих задач. В предлагаемом материале рассматривается серия геометрических задач, при решении которых используются схожие дополнительные построения. Идея использования таких построений возникает при рассмотрении свойств, которыми обладают различные конструкции из квадратов на плоскости. Эти свойства мы будем рассматривать постепенно, по мере необходимости, и называть леммами.

Лемма 1. *Четырехугольник, переходящий в себя при повороте на 90° вокруг точки пересечения его диагоналей, является квадратом.*

Упражнение 1. Докажите эту лемму.

Решение ряда задач будет сводиться к следующей конструкции: вершины одного квадрата лежат на сторонах другого. В подобных случаях принято говорить, что один из квадратов описан вокруг другого (такой же термин применяется и для других многоугольников с одинаковым количеством вершин в аналогичных ситуациях).

Лемма 2. *Прямоугольник, описанный около данного квадрата, является квадратом.*

Доказательство. Пусть вершины квадрата $KLMN$ лежат на сторонах прямоугольника $ABCD$ (рис.1). Рассмотрим поворот на 90° вокруг центра O квадрата $KLMN$, например, по часовой стрелке. Образом точки K является точка L, поэтому прямая AB, содержащая K, переходит в прямую, ей перпендикулярную и содержащую точку L, т.е. в прямую BC. Аналогично, образами прямых BC, CD и DA являются прямые CD, DA и AB соответственно. Следовательно, каждая вершина прямоугольника переходит в соседнюю (по часовой стрелке), значит, $ABCD$ – квадрат.

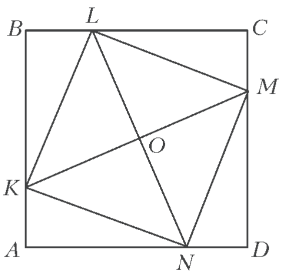

Рис. 1

Отметим два очевидных следствия, которые помогут при решении задач:

1) точка O – общий центр двух квадратов;

2) отрезки KM и LN, пересекаясь, делят квадрат $ABCD$ на четыре равные фигуры.

Упражнение 2. На сторонах AB, BC, CD и DA квадрата $ABCD$ отмечены точки K, L, M и N соответственно так, что $AK = BL = CM = DN$. Докажите, что $KLMN$ – квадрат.

Разберем несколько задач.

Задача 1 (В.Произволов, книга «Задачи на вырост»). *В четырехугольнике $ABCD$: $AB = BC$, $\angle ABC = \angle ADC = 90°$. Найдите его площадь, если расстояние от вершины B до прямой AD равно 1.*

Решение. Построим точки A' и C', симметричные A и C относительно точки B (рис.2,*а*). Тогда $ACA'C'$ – квадрат. Опишем вокруг него прямоугольник, начав с вершины D. По лемме 2 этот прямоугольник является квадратом. Тогда площадь $ABCD$ равна четверти площади квадрата со стороной 2 (см. следствие 2 леммы 2), т.е. равна 1.

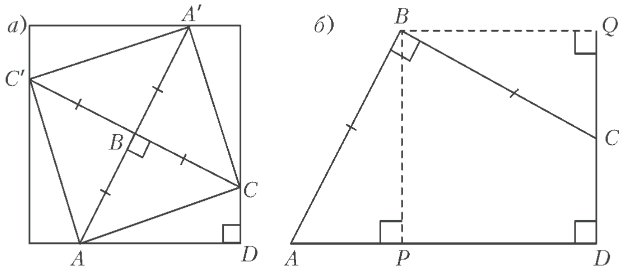

Рис. 2

Упражнения

3. По рисунку 2,*б* восстановите другой способ решения задачи 1.

4 (М.Волчкевич). В квадрате $ABCD$ на стороне CD и на продолжении стороны DA за точку A отмечены точки M и K соответственно. Докажите, что $AK = CM$ тогда и только тогда, когда $\angle BKM = 45°$.

Задача 2. *На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC во внешнюю сторону построен квадрат с центром в точке O. Докажите, что CO – биссектриса прямого угла.*

Решение. Построим вспомогательный квадрат с вершиной C, описанный около данного (рис.3,*а*). Тогда CO содержит диагональ построенного квадрата, которая делит угол C пополам.

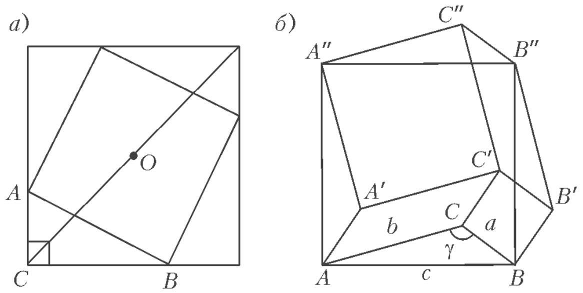

Рис. 3

Конечно, эта задача (как и многие последующие) имеет и другие способы решения, но мы сосредоточимся на построении вспомогательного квадрата.

Отметим, что чертеж квадрата, описанного около квадрата, который встретился уже несколько раз, может служить иллюстрацией одного из многочисленных доказательств теоремы Пифагора, использующих площадь. Действительно, если $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ (см. рис. 3,*а*), то $(a+b)^2 = c^2 + 2ab$, откуда $c^2 = a^2 + b^2$.

Более сложная конструкция, использующая вспомогательные квадраты, позволяет сделать обобщение.

Упражнение 5 (Г.Шарыгин, «Лекции по элементарной геометрии»). Используя рисунок 3,*б*, восстановите доказательство теоремы косинусов: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

Задача 3. *На сторонах прямоугольного треугольника с катетами a и b построены квадраты, лежащие вне треугольника. Найдите площадь треугольника с вершинами в центрах квадратов.*

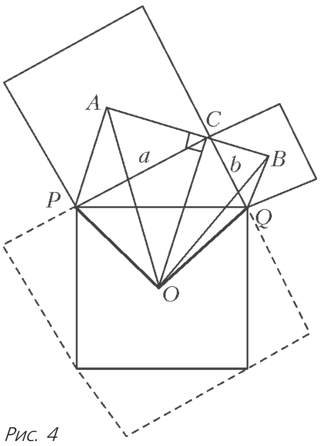

Рис. 4

Решение. Пусть C – вершина прямого угла данного треугольника PCQ, A, B и O – центры квадратов, построенных на его катетах и гипотенузе соответственно (рис.4). Так как CA и CB – биссектрисы углов квадратов, то точка C лежит на отрезке AB. Опишем вспомогательный квадрат вокруг квадрата, построенного на гипотенузе, продлив катеты исходного треугольника. Тогда точка O является центром этого квадрата, поэтому CO – биссектриса его прямого угла. Следовательно, $OC \perp AB$. Так как $PA \perp AB$, то $PA \parallel OC$, значит, площадь треугольника ACO равна площади треугольника PCO. Аналогично, равны площади треугольников BCO и QCO. Следовательно, площадь треугольника AOB равна площади четырехугольника $PCQO$, который составляет четверть от построенного квадрата со стороной $a + b$. Таким образом, $S_{\Delta AOB} = \dfrac{(a+b)^2}{4}$.

Задача 4 (В.Произволов, «Задачи на вырост»). *Квадраты ABCD и AKLM расположены так, как показано на рисунке 5,а. Докажите, что: а) $CL \parallel BD$; б) точка M лежит на прямой CD.*

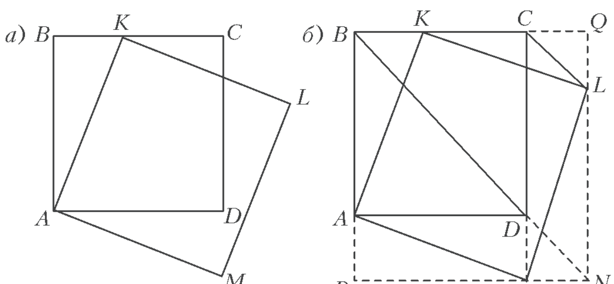

Рис. 5

Решение. Построим вспомогательный квадрат $BQNP$ (рис.5,*б*). Тогда CQ и AP равны как разности сторон двух квадратов. Также $AP = BK = QL = MN$ по лемме 2. Из равенства $CQ = QL$ следует утверждение пункта а), а из равенства $CQ = MN$ – утверждение пункта б).

Задача 5 (В.Расторгуев, Конкурс имени А.П.Савина, «Квант» №5–6 за 2015 г.). *Дан квадрат ABCD. Через вершину C проведена прямая m, не имеющая с квадратом других общих точек (рис.6,а). Точки E и F – проекции вершин B и D на прямую m. Отрезки BF и DE пересекаются в точке K. Докажите, что прямая AK перпендикулярна прямой m.*

Решение. Построим вспомогательный квадрат $EFGH$ (рис.6,*б*). Из точки A опустим перпендикуляр AN на

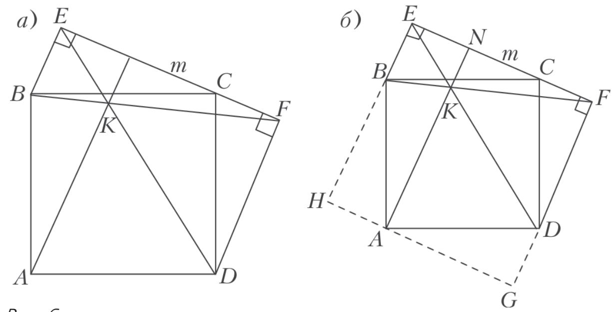

Рис. 6

прямую m. Тогда $EN = HA = BE$ и $FD = GA$ (свойства квадрата, описанного около квадрата).

Из подобия треугольников BEK и FDK следует, что $\dfrac{BK}{FK} = \dfrac{BE}{FD} = \dfrac{HA}{GA}$. Следовательно, прямая AN, параллельная HE, проходит через точку K, т.е. $AK \perp m$.

Рассмотрим теперь другое взаимное расположение двух квадратов, а именно, когда два квадрата в пересечении образуют восьмиугольник. Такая конструкция также обладает интересными свойствами

Лемма 3. *Квадраты ABCD и KLMN расположены так, что в пересечении образуется восьмиугольник (рис.7,а). Тогда диагонали PQ и RT этого восьмиугольника равны и перпендикулярны.*

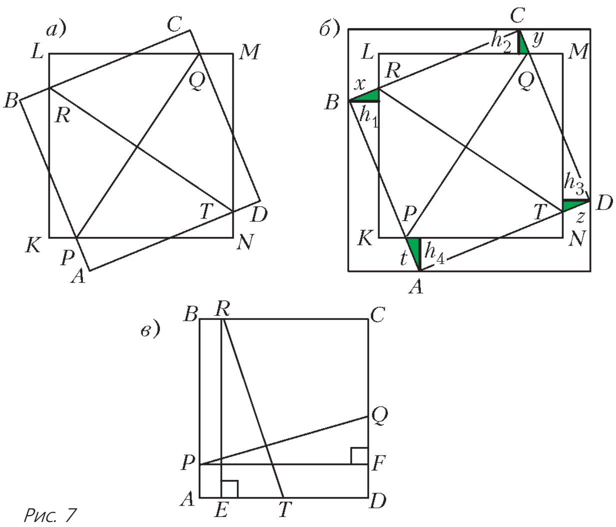

Рис. 7

Доказательство. Через вершины квадрата $ABCD$ проведем прямые, соответственно параллельные сторонам квадрата $KLMN$ (рис.7,*б*). По доказанному выше, образовавшийся прямоугольник является квадратом. Введем обозначения: $AP = t$, $BR = x$, $CQ = y$ и $DT = z$. Из вершин квадрата $ABCD$ проведем перпендикуляры h_1, h_2, h_3 и h_4 к ближайшим сторонам квадрата $KLMN$. Тогда $h_1 + h_3 = h_2 + h_4$ (каждая сумма равна разности сторон двух квадратов: вспомогательного и $KLMN$).

Заметим, что углы в зеленых треугольниках равны между собой, так как их соответствующие стороны попарно параллельны или перпендикулярны. Тогда, разделив почленно все слагаемые полученного равенства на косинус этого угла, получим $x + z = y + t$. Следовательно, равны проекции FQ и ET отрезков PQ и RT на соседние стороны квадрата $ABCD$ (рис.7,*в*). Значит, равны прямоугольные треугольники QPF и TRE (по двум катетам). Из равенства этих треугольников следует как равенство их гипотенуз, так и равенство соответствующих острых углов, что обеспечивает перпендикулярность PQ и RT.

Упражнения

6. Найдите другой способ доказательства леммы 3, использующий поворот.

7. а) Докажите, что если два отрезка, соединяющие точки на противолежащих сторонах квадрата перпендикулярны, то они равны. б) Верно ли обратное утверждение?

Задача 6 (Е.Бакаев, LXXVII Московская математическая олимпиада). *На квадратном столе лежит квадратная скатерть так, что ни один угол стола не закрыт, но с каждой стороны стола свисает треугольный кусок скатерти. Известно, что какие-то два соседних куска равны. Докажите, что и два других куска тоже равны.*

Решение. Пусть квадрат $ABCD$ – это скатерть, а закрашенные треугольники – ее куски, «свисающие» со стола (рис.8). В этих треугольниках равны соответствующие острые углы (у них стороны либо соответственно параллельны, либо соответственно перпендикулярны), значит, эти четыре треугольника подобны.

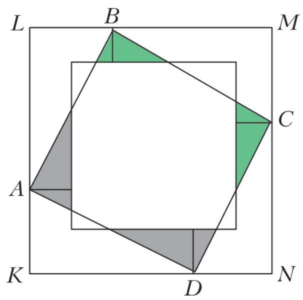

Рис. 8

Проведем через вершины квадрата $ABCD$ прямые, соответственно параллельные сторонам квадрата-стола. Получим квадрат $KLMN$.

Из вершин квадрата $ABCD$ проведем высоты в закрашенных треугольниках. Как было показано выше, сумма высот, проведенных из A и C, равна сумме высот, проведенных из B и D. Пусть известно, что равны зеленые треугольники, тогда равны их высоты. Следовательно, равны и высоты серых треугольников, а так как эти треугольники подобны, то равны и сами серые треугольники.

Упражнение 8. Найдите другой способ решения задачи 6, использующий поворот.

Если к следующим двум задачам подходить формально, то квадраты там выступают не в роли вспомогательных, но их решения основаны на применении леммы 3, при доказательстве которой уже использовались вспомогательные квадраты.

Задача 7 (Л.Штейнгарц, XIV Устная олимпиада по геометрии). *Два квадрата расположены так, как показано на рисунке 9,а. Докажите, что площади закрашенных четырехугольников равны.*

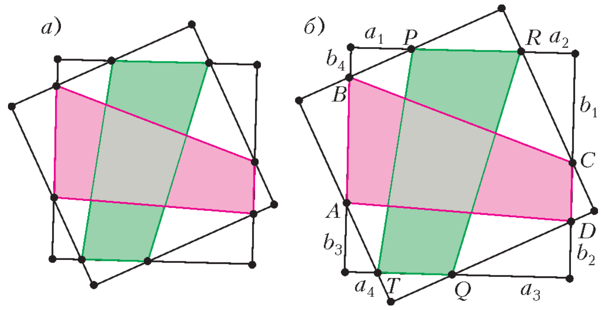

Рис. 9

Решение. Введем обозначения так, как показано на рисунке 9,*б*. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. По лемме 3 получим, что $AC = PQ$ и $AC \perp PQ$. Аналогично, $BD = RT$ и $BD \perp RT$. Таким образом, в четырехугольниках $ABCD$ и $PRQT$ соответственно равны диагонали и равны углы между диагоналями (острые углы с соответственно перпендикулярными сторонами). Так как площадь четырехугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними, то $S_{ABCD} = S_{PRQT}$.

Второй способ. Воспользуемся тем, что $ABCD$ и $PRQT$ – трапеции с равными высотами (стороны квадрата). Тогда требуемое утверждение будет выполняться, если будет верным равенство: $AB + CD = PR + QT$.

В справедливости этого равенства несложно убедиться, если использовать промежуточный результат, полученный при доказательстве леммы 3: $a_1 + a_3 = b_1 + b_3$ и $a_2 + a_4 = b_2 + b_4$.

Задача 8 (Д.Терешин, I Олимпиада по геометрии имени И.Ф.Шарыгина, заочный тур). *Вокруг выпуклого четырехугольника $PRQT$ описаны три прямоугольника. Известно, что два из этих прямоугольников являются квадратами. Верно ли, что и третий обязательно является квадратом?*

Решение. Пусть квадраты $ABCD$ и $KLMN$ описаны около данного четырехугольника, тогда образуется конструкция, показанная на рисунке 7,*а*. По лемме 3, $PQ = RT$ и $PQ \perp RT$, т.е. диагонали данного четырехугольника равны и перпендикулярны.

Докажем, что любой прямоугольник, описанный около такого четырехугольника, является квадратом. Действительно, пусть вокруг $PRQT$ описан прямоугольник $EFGH$ (рис.10). Через центр симметрии O этого прямоугольника проведем отрезки $P'Q'$ и $R'T'$, соответственно параллельные PQ и RT. Понятно, что $P'Q' = PQ$, $R'T' = RT$, O – середина отрезков $P'Q'$ и $R'T'$. Тогда параллелограмм $P'R'Q'T'$, в котором

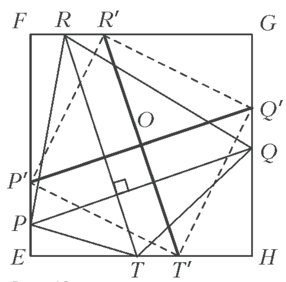

Рис. 10

диагонали равны и перпендикулярны, является квадратом, поэтому доказываемое утверждение следует из леммы 2.

Теперь рассмотрим несколько задач, в которых построение вспомогательного квадрата далеко не очевидно. При решении этих задач существенным образом используются движения.

Задача 9. *На сторонах AB и AC треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты ABDE и ACFG. Докажите, что прямые BF и CD пересекаются на высоте треугольника ABC.*

Решение. Построим вспомогательный квадрат на третьей стороне данного треугольника – $BCKL$ (рис.11). Из

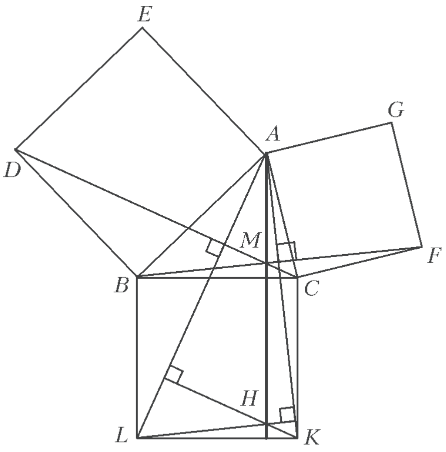

Рис. 11

вершин K и L треугольника AKL проведем его высоты, которые пересекутся в точке H. Тогда $AH \perp KL$.

Так как $BC = BL$, $BD = BA$ и $\angle DBC = 90° + \angle ABC = \angle ABL$, то при повороте на $90°$ против часовой стрелки треугольник ABL перейдет в треугольник DBC. Следовательно, $DC \perp AL$. Аналогично доказывается, что $FB \perp AK$.

Таким образом, $CD \parallel KH$ и $BF \parallel LH$, поэтому при параллельном переносе «вверх» на расстояние, равное стороне квадрата $BCKL$, точка H перейдет в точку M пересечения прямых BF и CD. При этом M лежит на прямой AH, которая содержит высоту треугольника ABC, откуда и следует утверждение задачи.

Задача 10 (Е.Бакаев, XXII Турнир математических боев имени А.П.Савина). *В остроугольном треугольнике ABC: H – ортоцентр. На сторонах AC и BC отмечены точки K и L соответственно так, что AK = BH и BL = AH, M – середина отрезка KL. Докажите, что угол AMB – прямой.*

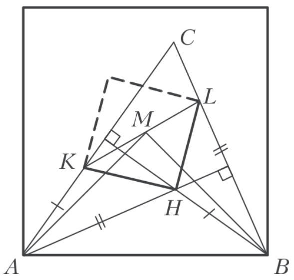

Рис. 12

Решение. На стороне AB данного треугольника построим квадрат (рис.12). Рассмотрим поворот вокруг центра этого квадрата на угол $90°$, например, против часовой стрелки. Образом вершины A при таком повороте является вершина B, образом луча AK – луч BH (в силу их перпендикулярности), тогда образом точки K будет точка H, так как $AK = BH$. Аналогично, образом точки H при этом повороте является точка L. Тогда центр поворота является серединой отрезка KL, т.е. он совпадает с точкой M. Так как сторона квадрата видна из его центра под прямым углом, то угол AMB – прямой.

Отметим, что треугольник KHL – равнобедренный и прямоугольный, поэтому является «половиной» квадрата с тем же центром M.

В заключение докажем так называемую «теорему о пицце».

Теорема. *Из точки, лежащей внутри круга, провели 8 лучей так, что углы между соседними лучами равны 45 градусам. Части, на которые круг оказался разделен, раскрасили, чередуя два цвета. Тогда площадь, закрашенная одним цветом, равна площади, закрашенной другим цветом (рис.13,а).*

Таким образом, двое людей могут поделить круглую пиццу поровну, разрезав ее на 8 частей классическим способом, причем для этого не обязательно находить ее центр. Отсюда теорема и получила свое название.

Доказательство. Сначала сформулируем и докажем аналог этой теоремы для квадрата:

Через произвольную точку внутри квадрата проведены прямые, параллельные его сторонам и диагоналям, которые разбили квадрат на части. Эти части закрасили через одну (рис.13,б). Тогда закрашенная площадь равна половине площади квадрата.

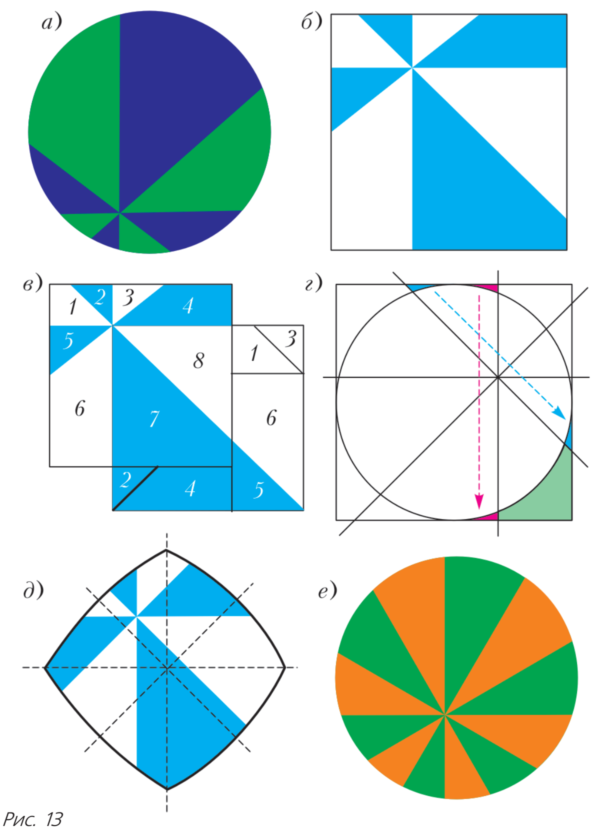

Рис. 13

Действительно, пронумеруем полученные части квадрата цифрами от 1 до 8. «Сдвинем» его так, как показано на рисунке 13,*в*, сохранив части 7 и 8 и переложив остальные части так, чтобы все закрашенные части оказались под диагональю нового квадрата, а не закрашенные – над диагональю.

Перейдем к доказательству самой теоремы. Рассмотрим квадрат, описанный около данного круга, со стороной, параллельной одной из линий разреза. Так как равенство площадей разноцветных частей квадрата уже доказано, то достаточно доказать равенство таких площадей в фигуре, получаемой из квадрата вырезанием из него круга. Сделать это можно, опять-таки, используя перегруппировку частей. Рассмотрим противоположные части этой фигуры (см. пример на рис.13,*г*). Нетрудно заметить, что их кусочки можно переложить так, что получится четверть такой фигуры.

Упражнение 9. Проверьте это и доведите до конца доказательство теоремы.

Приведенное выше доказательство изложено в уже упомянутой книге В.В.Произволова «Задачи на вырост», но в ней автор доказывает более сильное утверждение: *Выпуклая фигура имеет четыре оси симметрии (углы между соседними осями составляют 45 градусов). Через внутреннюю точку фигуры проведены параллельные этим осям четыре прямые, которые делят фигуру на восемь частей, закрашенных через одну (рис.13,д). Тогда сумма площадей закрашенных частей равна сумме площадей белых частей.*

Упражнение 10. Убедитесь в том, что намеченное выше доказательство «теоремы о пицце» работает и в этом случае.

Завершая разговор, отметим, что «теорема о пицце» верна даже в тех случаях, когда пицца режется не на 8 частей, а на любое большее количество, кратное четырем (если углы между соседними разрезами по-прежнему равны между собой; см., например, рис.13,*е*).

Но доказательство этого утверждения уже выходит за рамки нашей статьи.

В следующих задачах читателям предлагается самим поискать вспомогательные квадраты.

Задачи для самостоятельного решения

1 (Е.Бакаев, XXXVII Турнир имени М.В.Ломоносова). На сторонах AB, BC, CD и DA квадрата $ABCD$ отмечены точки K, L, M и N соответственно так, что $AK = BL = CM = AN$. Докажите равенство углов LMC и MKN.

2 (Н.Стрелкова, XIV Устная олимпиада по геометрии). Внутри прямоугольника проведена ломаная, звенья которой равны меньшей стороне прямоугольника, а соседние звенья перпендикулярны (рис.14). Найдите отношение сторон прямоугольника.

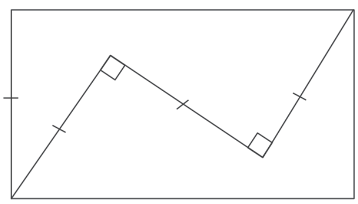

Рис. 14

3 (Е.Бакаев, XIV Московская устная олимпиада для 6–7 классов). Квадраты $ABCD$ и $BEFG$ расположены так, как показано на рисунке 15. Оказалось, что точки A, G и E лежат на одной прямой. Докажите, что тогда точки D, F и E также лежат на одной прямой.

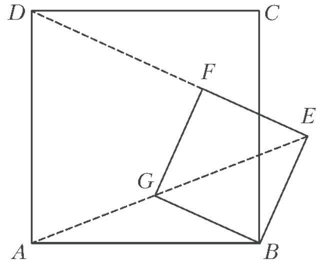

Рис. 15

4 (В.Произволов, «Задачи на вырост»). Квадраты $ABCD$ и $A'B'C'D'$ расположены так, что вершины A и D первого квадрата лежат на сторонах $A'B'$ и $A'D'$ второго, а вершина C' второго – на стороне BC первого (рис.16). Докажите, что отрезок MN, соединяющий две общие точки границ квадратов, проходит через центр O квадрата $ABCD$.

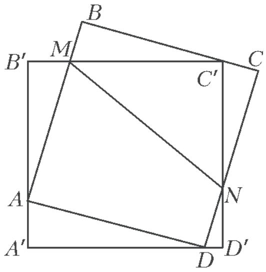

Рис. 16

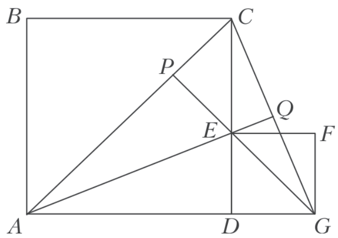

Рис. 17

5. Квадраты $ABCD$ и $DEFG$ расположены так, как показано на рисунке 17. Прямые AC и GE пересекаются в точке P, а прямые AE и CG – в точке Q. Докажите, что точки B, P, Q и F лежат на одной прямой.

6 (Е.Бакаев, XXXIX Турнир имени М.В.Ломоносова). Две противолежащие стороны четырехугольника равны и перпендикулярны, а две другие имеют длины a и b ($a > b$). Найдите его площадь.

7. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC. На продолжениях катетов AB и AC отложены равные отрезки BK и CL. Из точек A и B проведены перпендикуляры к KC, которые пересекли KL в точках F и E соответственно. Докажите, что $EF = FL$.

8 (Ю.Блинков, X Устная олимпиада по геометрии). В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$: $\angle A = \angle C = 90°$, $AB = AE$, $BC = CD$, $AC = 1$. Найдите площадь пятиугольника.

9 (Е. Ермакова, XII Творческий конкурс учителей по математике). Постиран квадратный платок площади $1\ м^2$. Для просушки его вешают на веревку так, чтобы центр платка был на веревке. За час успевают высохнуть только те части платка, которые не перекрывают друг друга. Какова наибольшая суммарная площадь этих частей?

10 (И.Шарыгин, LVI Московская математическая олимпиада). На стороне AB треугольника ABC во внешнюю сторону построен квадрат с центром O. Точки M и N – середины сторон AC и BC соответственно, а длины этих сторон равны соответственно b и a. Найдите наибольшее значение суммы $OM + ON$, если угол ACB является переменной величиной.

11 (И.Челябов, журнал «Математика в школе» №3 за 2014 г.). Разрежьте прямоугольный треугольник с гипотенузой длины c на три части, из которых можно сложить прямоугольник, разность длин сторон которого равна c.