Треугольники с общим ортоцентром и общей вписанной коникой

К.А. Бельский.

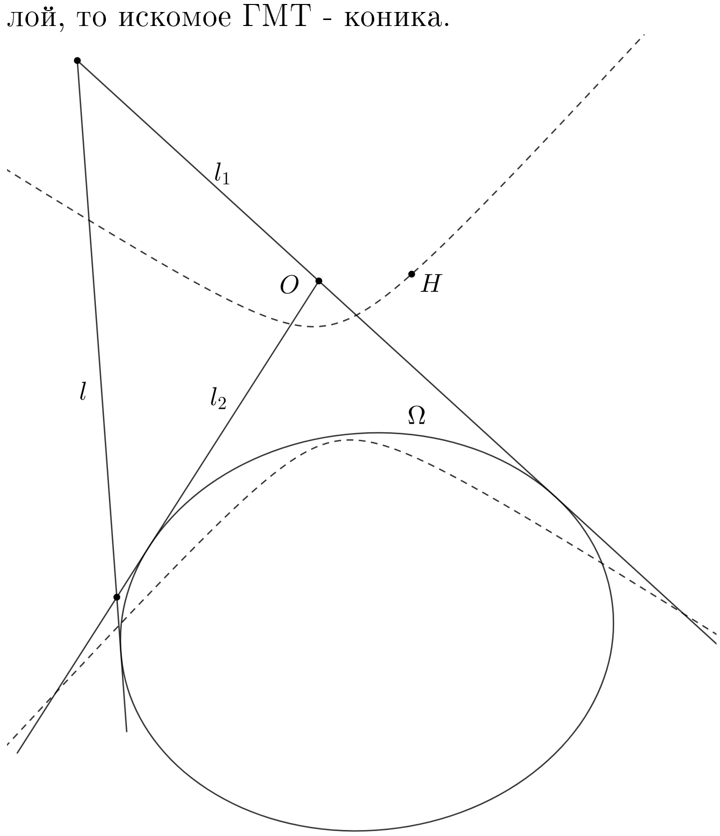
Задача. Дана коника Ω и точка O вне её. Прямая l — касательная к конике Ω, не проходящая через O. Прямые l_1, l_2 — касательные из точки O к конике Ω. Точка H — ортоцентр треугольника, который образован прямыми l, l_1, l_2. Найти геометрическое место точек H при изменении прямой l.

Предложение 1. Если $\angle(l_1, l_2) = 90°$, то искомое ГМТ - точка O.

Предложение 2. Если $\angle(l_1, l_2) \neq 90°$ и Ω является параболой, то искомое ГМТ - прямая, которая является директрисой параболы Ω.

Об этом свойстве параболы можно прочитать в книге [1].

Предложение 3. Если $\angle(l_1, l_2) \neq 90°$ и Ω не является параболой, то искомое ГМТ - коника.



Прежде чем доказать ***предложение 3***, сформулируем известные теоремы и решим несколько подготовительных задач.

1. Известные теоремы.

Теорема 1.
Дан $\triangle ABC$ с ортоцентром H. Тогда любая гипербола, которая проходит через точки A, B, C, H, — равнобокая, то есть её асимптоты перпендикулярны. И любая равнобокая гипербола, которая проходит через точки A, B, C, также проходит через точку H. Несколько различных доказательств этой теоремы приведены в книге [1].

Двойственная теорема Дезарга об инволюции.
В четырёхугольник $ABCD$ вписана коника Ω. Прямые AB и CD пересекаются в точке E, а прямые AD и BC в точке F. На плоскости выбрана точка P. Тогда существует проективная инволюция, которая меняет местами пары прямых $PA \leftrightarrow PC, PB \leftrightarrow PD, PE \leftrightarrow PF$ и касательные из точки P к Ω.

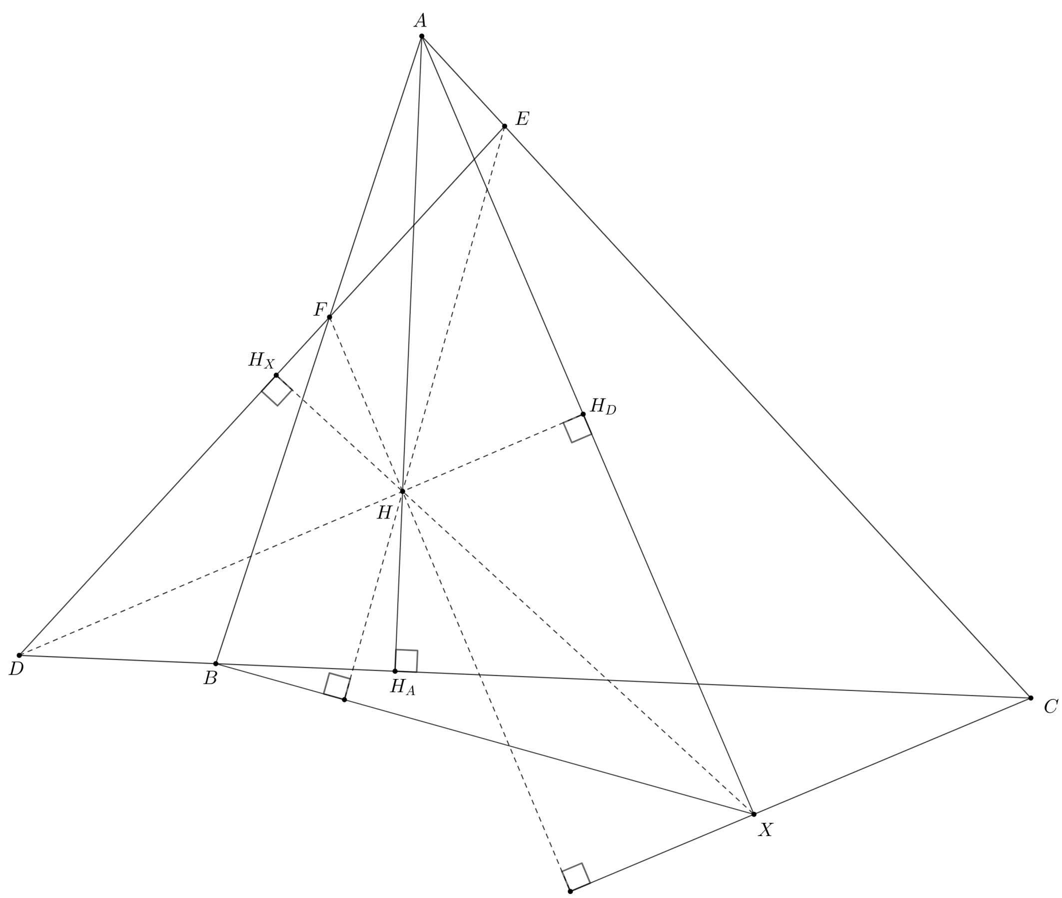
Двойственная лемма Соллертинского.
Пусть l — произвольная прямая и f — проективное преобразование. Тогда все прямые $Pf(P)$, где P — точка, лежащая на l, касаются коники, касающейся прямых l и $f(l)$.

Теорема Понселе.
Даны два треугольника $\triangle ABC$ и $\triangle DEF$. Тогда точки A, B, C, D, E, F лежат на одной конике в том и только том случае, когда существует коника, которая касается прямых AB, AC, BC, DE, DF, EF. Доказательство последних двух теорем также можно найти в книге [1].

2. Промежуточные задачи.

Задача 1.
Дан $\triangle ABC$ с ортоцентром H. Точки D, E, F лежат на прямых BC, AC, AB соответственно так, что они коллинеарны. Точка H_A — основание перпендикуляра из точки A на прямую BC. Точка H_X — основание перпендикуляра из точки H на прямую EF. Тогда существует точка X такая, что $AX \perp HD, BX \perp HE, CX \perp HF, HX \perp EF$ и $HH_a * HA = HX * HH_x$.

Решение.
Пусть перпендикуляр из точки B к HE пересекает перпендикуляр из точки C к прямой HF в точке X. Тогда треугольники $\triangle AEF$ и $\triangle XBC$ ортологичны. Следовательно, перпендикуляр из точки B к прямой AE, перпендикуляр из точки C к прямой AE, перпендикуляр из точки X к прямой EF пересекаются в одной точке, поэтому $HX \perp EF$. Аналогично можно показать,что $HD \perp AX$. Равенство $HX * HH_X = HA * HH_A$ следует из вписанности четвёрок точек A, D, H_A, H_D и D, X, H_D, H_X, где H_D — основание перпендикуляра из точки H к AX. ■



Задача 2.
Дан $\triangle ABC$ с ортоцентром H. Точка X двигается по конике,

которая проходит через точки A, B, C. Точки E, F выбраны на прямых AC, AB соответственно так, что $HE \perp BX, HF \perp CX$. Тогда прямая EF касается фиксированной коники, которая вписана в $\triangle ABC$.

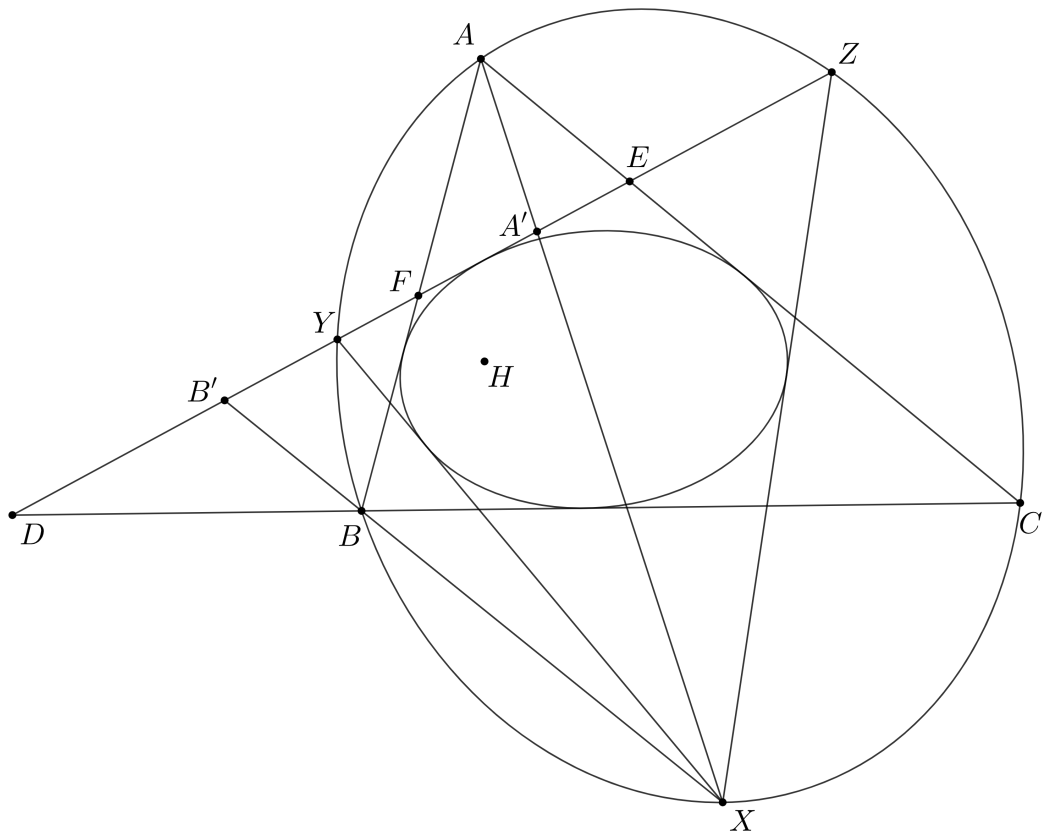
Решение.

Заметим, что существует проективное отображение из E в F. Следовательно, по двойственной теореме Соллертинского прямая EF касается фиксированной коники,которая касается прямых AB, AC. Касание этой коники с прямой BC достигается, когда D совпадает с точкой A. Заметим,что утверждение верно и в обратную сторону: если прямая EF касается фиксированной коники, которая вписана в $\triangle ABC$, то точка D двигается по конике,которая проходит через точки A, B, C. $\blacksquare$

Задача 3. Дан $\triangle ABC$ с ортоцентром H. Коника Γ не является параболой и вписана в $\triangle ABC$. Тогда существует коника $\mathcal{C}$, проходящая через точки A, B, C и такая, что любой треугольник, вписанный в конику $\mathcal{C}$ и описанный около коники Γ, имеет ортоцентр H.

Решение.

Касательная к Γ пересекает прямые BC, AC, AB в точках D, E, F соответственно. По *задаче 1* существует точка X такая, что $AX \perp HD, BX \perp HE, CX \perp HF, HX \perp EF$. Пусть $AX \cap EF = A', BX \cap EF = B'$, $CX \cap EF = C'$. Заметим,что треугольники $\triangle DXA', \triangle EXB', \triangle FXC'$ имеют общий ортоцентр H. Касательные из точки X пересекают прямую EF в точках Y, Z. Тогда по двойственной теореме Дезарга об инволюции существует проективная инволюция, которая меняет местами пары точек $Y \leftrightarrow Z, A' \leftrightarrow D, B' \leftrightarrow E, C' \leftrightarrow F$. Следовательно, точка H — также ортоцентр для $\triangle XYZ$. По *обратной задаче 2* и *задаче 1* точки X, Y, Z двигаются по фиксированной конике, которая проходит через A, B, C, так как $HX * d(H, EF) = HY * d(H, XZ) = HZ * d(H, XY) = HA * d(H, BC)$, где $d(X, YZ)$ — расстояние от точки X до прямой YZ. $\blacksquare$

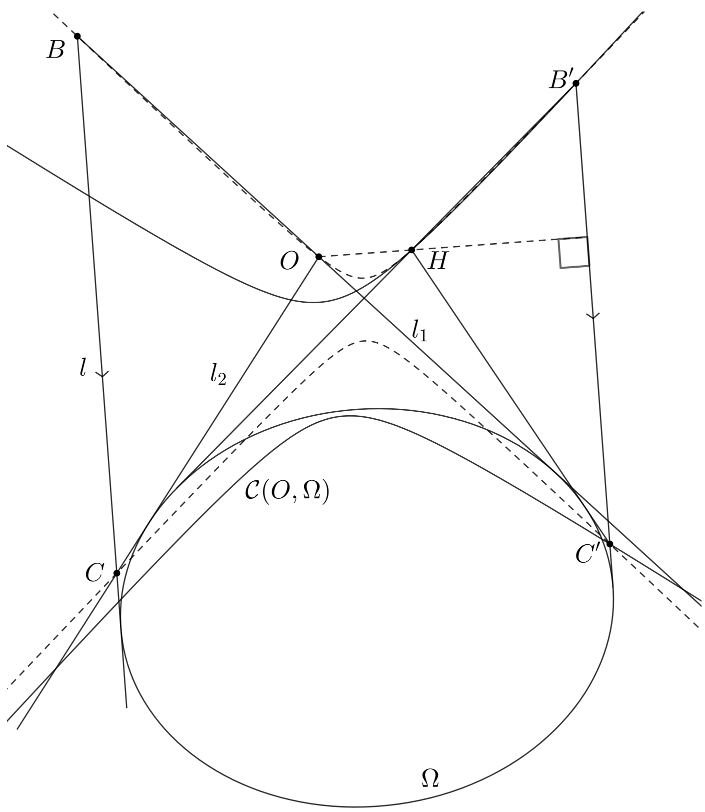


Следствие.
Дана коника Ω, которая не является параболой, и точка H, которая лежит вне её. Тогда существует коника такая, что любой треугольник, вписанный в неё и описанный около Ω, имеет ортоцентр H. Эту конику будем обозначать $\mathcal{C}(H, \Omega)$.
Доказательство.
Пусть l — касательная из точки H к конике Ω. Прямые l_1, l_2 — касательные к Ω, которые перпендикулярны l. Далее проводим переменные касательные l' к Ω и делаем построение, которое аналогично построению $\triangle XYZ$ в *задаче 3.*

3. Доказательство исходной задачи.

Доказательство предложения 3.

Пусть $B'C'$ — хорда коники $\mathcal{C}(O, \Omega)$, которая касается коники Ω и параллельна прямой l. Прямая l пересекает прямые l_1, l_2 в точках B, C соответственно. Пусть точка H' такова, что прямые $H'B', H'C'$ касаются коники Ω. Следовательно, $H' \in \mathcal{C}(O, \Omega)$ и O — ортоцентр треугольника $\triangle H'B'C'$. По *теореме Понселе* точки O, B, C, B', C', H лежат на одной конике $\mathcal{C}$. Следовательно, по *теореме 1* коника $\mathcal{C}$ является равнобокой гиперболой. Так, как $H' \in \mathcal{C}$ и $OH' \perp B'C' \parallel BC$, точки H и H' совпадают. Следовательно, точка H двигается по конике $\mathcal{C}(O, \Omega)$. ■



Список литературы

[1] *Акопян А.В., Заславский А.А.* Геометрические свойства кривых второго порядка. М.: МЦНМО, 2007.

Кирилл Аркадьевич Бельский, ученик ЮМШ (г. Санкт-Петербург)