Задачи с тремя равными окружностями.

А.Карлюченко
Г.Филипповский

Как здорово сказано: «Окружность – это душа геометрии!» (И.Ф.Шарыгин). А если речь идет о трех окружностях? Да еще равных? Ну, тогда душа особенно красива!.. :) Подборка геометрических задач с тремя равными окружностями пополнялась с годами, складывалась в коллекцию. И вот, похоже, пришла пора вынести эту коллекцию на суд читателей. Верим, что предложенные задачи вызовут интерес; будут полезны всем тем, кто любит геометрию.

Задача 1.

Три равные окружности с центрами O_1; O_2; O_3 имеют общую точку пересечения N, а также точки A, B, C попарных пересечений *(рис.1)*. Докажите, что O_2O_3BC – параллелограмм.

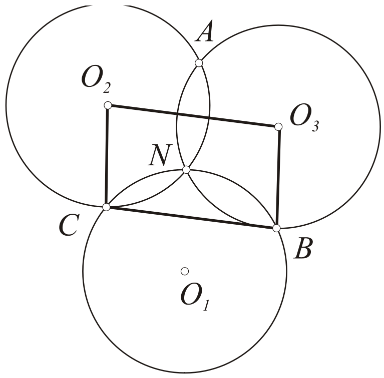

рис.1

Доказательство.

Очевидно, O_1NO_2C – ромб (все стороны равны радиусу любой из окружностей). Тогда $O_1N \parallel O_2C$ и $O_1N = O_2C$ *(рис.2).*

Аналогично, O_1NO_3B – ромб и $O_1N \parallel O_3B$; $O_1N = O_3B$.

Значит, поскольку $O_2C \parallel O_3B$ и $O_2C = O_3B$, четырехугольник O_2O_3BC является параллелограммом.

Задача 2.

Докажите, что в условиях *задачи 1* точка N является ортоцентром (точкой пересечения высот) треугольника ABC.

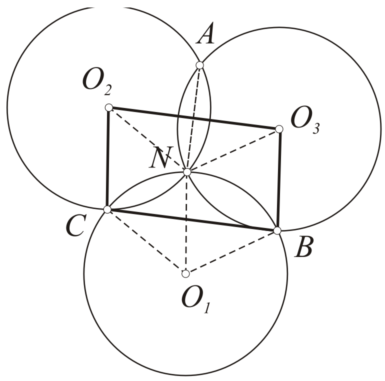

рис.2

Доказательство.

Очевидно, $AN \perp O_2O_3$ (общая хорда двух пересекающихся окружностей перпендикулярна их линии центров) – *рис.1*. Поскольку $O_2O_3 \parallel BC$ *(задача 1)* то $AN \perp BC$. И прямая AN совпадает с высотой в ΔABC. Аналогично $BN \perp AC$ и $CN \perp AB$. Таким образом, точка N – ортоцентр в ΔABC.

Задача 3.

Если три окружности одного радиуса имеют общую точку пересечения, то три другие точки пересечения лежат на окружности того же радиуса. Докажите!

Доказательство.

Согласно *задаче 1* $O_2O_3 = BC$; $O_3O_1 = AC$ и $O_1O_2 = AB$ *(рис.1)*. Тогда $\Delta O_1O_2O_3 = \Delta ABC$ (*по трем сторонам*). Следовательно, равны и окружности, описанные около этих треугольников. Так как $NO_1 = NO_2 = NO_3$ – как радиусы трех равных окружностей, то точка N – центр описанной окружности $\Delta O_1O_2O_3$. И радиус этой окружности – такой же, как у трех равных окружностей: $NO_1 = NO_2 = NO_3$.

Задача 4.

Две равные окружности касаются в точке N. Окружность s того же радиуса проходит через N и пересекает первые окружности в точках B и C *(рис.3)*. Докажите, что BC – диаметр s. *(Юрий Билецкий)*

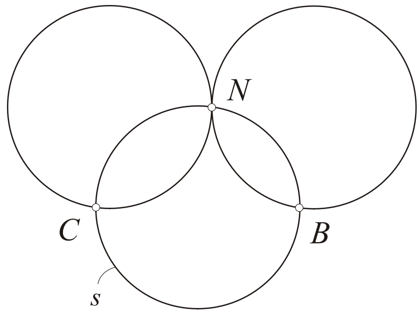

рис.3

Доказательство.

Можно заметить, что перед нами *задача 2*, в которой точки A и N совпали. Тогда $N \equiv A$ является ортоцентром в ΔBNC, то есть $\angle BNC = 90°$. Поскольку $\angle BNC$ – вписан в окружность s, то BC – ее диаметр.

Задача 5.

В условиях *задачи 1* отрезки O_1A; O_2B; O_3C пересекаются в одной точке. Докажите!

Доказательство.

Как было показано в *задаче 1*, четырехугольник O_2O_3BC является параллелограммом *(рис.1)*. Точно так же O_1O_2AB и O_1O_3AC – параллелограммы. При этом параллелограммы O_2O_3BC и O_1O_2AB имеют общую диагональ O_2B. В то же время O_3C – общая диагональ параллелограммов O_2O_3BC и O_1O_3AC. Поскольку O_2B и O_3C имеют общую середину (O_2B и O_3C – диагонали в параллелограмме O_2O_3BC), то, очевидно, в этой точке и пересекаются отрезки O_1A; O_2B и O_3C.

Задача 6.

Три окружности одного радиуса расположены так, что одна из них касается двух других (назовем их ω и s). $BC = a$ – общая внешняя касательная к ω и s *(рис.4)*. Найдите длину отрезка DE, где D и E – точки касания первой окружности с ω и s соответственно. *(Алексей Карлюченко)*

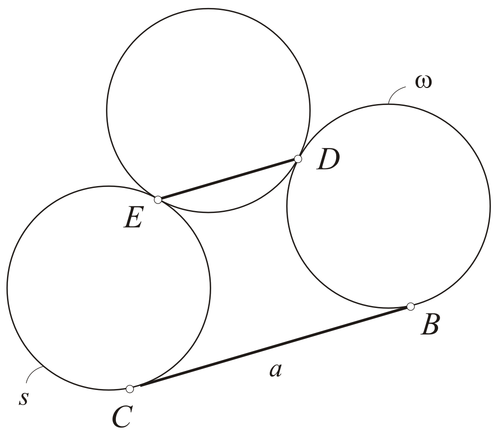

рис.4

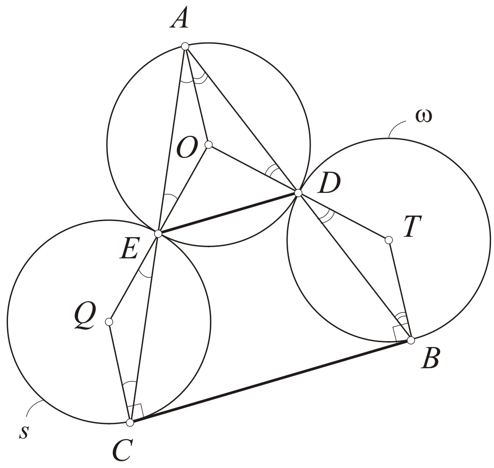

рис.5

Решение.

Пусть лучи BD и CE пересекаются в точке A *(рис.5)*, причем A лежит на первой окружности *(покажите!)*. Пусть также точки O; T; Q – центры равных окружностей. Из равенства ΔAOE и ΔCQE (*по двум сторонам и углу между ними*), а также ΔAOD и ΔBTD (*тоже по двум сторонам и углу между ними*) следует, что $AE = EC$ и $AD = DB$. Тогда DE – средняя линия в ΔABC и

$$DE = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}.$$

Задача 7.

Точки E, F и K – соответственно середины сторон BC, AC и AB треугольника ABC. В треугольники AFK, BKE и CEF вписаны окружности соответственно с центрами O_1; O_2; O_3. Докажите, что O_1E; O_2F и O_3K пересекаются в одной точке.

Доказательство.

Очевидно, окружности с центрами O_1;O_2;O_3 равны (равны треугольники AFK, BKE и CEF – по трем сторонам). Пусть I – центр вписанной в ΔABC окружности (инцентр). Тогда $A-O_1-I$ – одна прямая, совпадающая с биссектрисой угла A *(рис.6)*. При этом $AO_1=\frac{1}{2}AI$ (треугольнике AKF и ABC подобны с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$). Пусть Q – центр окружности, вписанной в ΔEFK. Тогда $EQ=AO_1$ – как соответствующие отрезки в равных треугольниках AFK и EKF. И, поскольку $AFEK$ – параллелограмм, то $EQ \parallel AO_1$. Однако $AO_1 = O_1I$. Следовательно, $EQ = O_1I$ и $EQ \parallel O_1I$. Значит, O_1IEQ – также параллелограмм, и его диагональ O_1E проходит через точку T – середину QI. Аналогично можно показать, что O_2F и O_3K тоже проходят через середину отрезка QI. Таким образом, O_1E; O_2F и O_3K пересекаются в одной точке – точке T (середине отрезка QI).

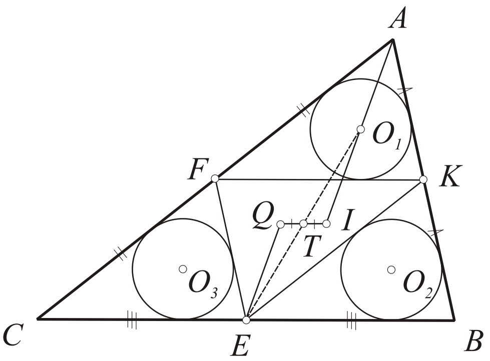

рис.6

Задача 8.

Три окружности одинакового радиуса расположены так, как показано на *рис.7*. Докажите, что сумма отмеченных дуг AK, BN и CT равна $180°$.

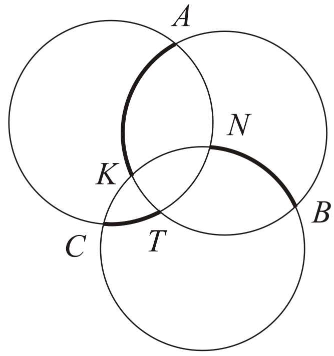

рис.7

Доказательство.

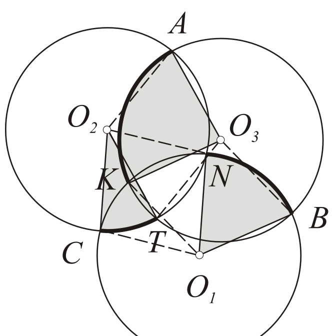

рис.8

Обозначим центры окружностей точками O_1; O_2; O_3. Заметим, что отрезки AO_3 и O_2T – параллельны и равны, поскольку AO_2TO_3 – ромб *(рис.8)*. Аналогично $O_3K \parallel O_1B$ и $O_3K=O_1B$ (O_3KO_1B – ромб), а также $O_1N \parallel O_2C$ и $O_1N = O_2C$ (O_1CO_2N – ромб).

Отдельно построим окружность ω того же радиуса с центром в точке O и разместим в ней сектор $OB'N'$, равный сектору O_1BN *(рис.9)*. Затем в ней же поместим сектор $OC'T'$, равный сектору O_2CT. Так как $O_1N \parallel O_2C$, то $N'-O-C'$ – одна прямая. При этом $N'C'$ – диаметр окружности ω. Наконец, разместим в окружности ω сектор $OA'K'$, равный сектору O_3AK. Поскольку $OA' \parallel OT'$ ($O_3A \parallel O_2T$), то точки A';O;T' принадлежат одной прямой. Аналогично показывается, что $K'-O-B'$ – одна прямая. Следовательно, сектор $OT'B$ равен сектору $OA'K'$ и $\cup B'T'=\cup A'K'$. Таким образом, дуги $N'B'$; $B'T'$ и $T'C'$ заполняют половину окружности, и их сумма равна $180°$.

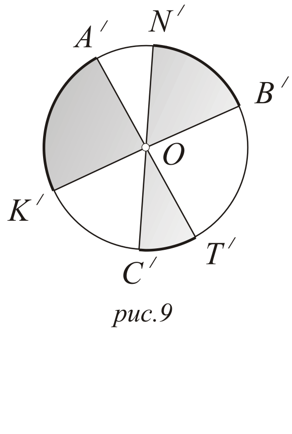

рис.9

Задача 9.

Три равные окружности касаются друг друга. Из произвольной точки окружности ω, касающейся их внутренним образом, проведены касательные к трем равным окружностям. Докажите, что сумма длин двух касательных равна длине третьей.

Доказательство.

Пусть окружность ω с центром в точке Q касается внутренним образом равных окружностей с центрами $O_1;O_2;O_3$ в точках $K;N;T$ *(рис.10)*. Очевидно, ΔKNT – равносторонний. Из произвольной точки D окружности ω проведем отрезки DK, DN и DT. Известно, что $\boxed{DK + DT = DN}$ *(1)* – важнейшее свойство равностороннего треугольника: *для любой точки окружности, описанной около равностороннего треугольника, сумма расстояний ее до двух ближних вершин равна расстоянию до данной вершины*. Пусть DK пересекает окружность с центром в O_1 в точке E. Тогда $DK \cdot DE = DL^2 = a^2$ – по *теореме о квадрате касательной* (где $DL = a$ – касательная из точки D к окружности O_1). С другой стороны, $\dfrac{DK}{DE} = \dfrac{QK}{QO_1}$ (согласно *теореме Фалеса*).

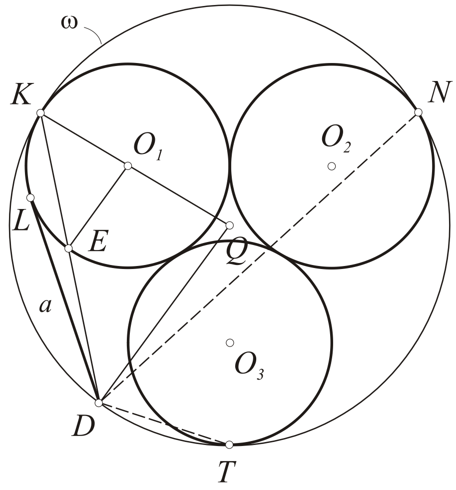

рис.10

Пусть радиусы равных окружностей равны r, а радиус окружности ω равен R. Тогда $\dfrac{DK}{DE} = \dfrac{R}{R-r}$, откуда $DE = DK \cdot \dfrac{R-r}{R}$. Следовательно, $a^2 = DK^2 \cdot \dfrac{R-r}{R}$ и $a = DK \cdot \sqrt{\dfrac{R-r}{R}}$. Аналогично, касательная из точки D к окружности O_2 будет иметь вид: $b = DN \cdot \sqrt{\dfrac{R-r}{R}}$, а касательная из D к окружности O_3: $c = DT \cdot \sqrt{\dfrac{R-r}{r}}$. Покажем, что $a + c = b$. Действительно, $a + c = \sqrt{\dfrac{R-r}{r}} \cdot (DK + DT)$. Согласно *(1)*, $DK + DT = DN$. Следовательно, $a + c = b$, что и требовалось доказать!

Задача решается аналогично и в том случае, когда окружность ω касается равных окружностей внешним образом.

Замечание. Данная задача также может быть эффективно решена с помощью теоремы Кэзи [4].

Задача 10.

Три равные окружности радиуса r касаются друг друга, и их центры $O_1;O_2;O_3$ лежат на одной прямой. Окружность ω с центром T радиуса R касается первой и третьей окружностей внутренним образом *(рис.11)*. К окружностям O_1 и O_3 проведена общая внутренняя касательная, пересекающая ω в точках K и N. Докажите, что $KN = R + 3r$ *(Сангаку – японская храмовая геометрия).*

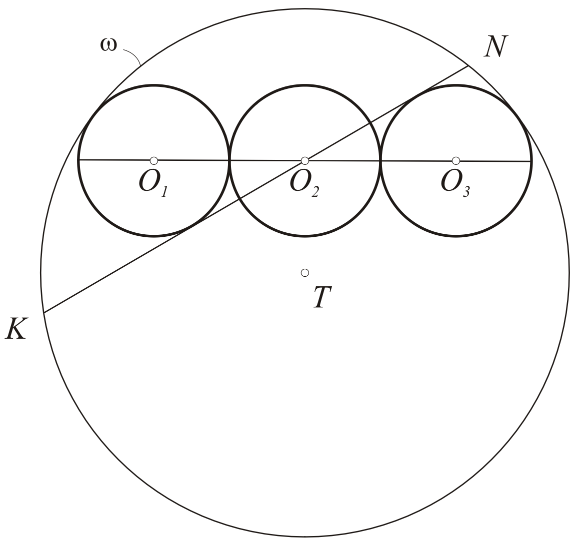

рис.11

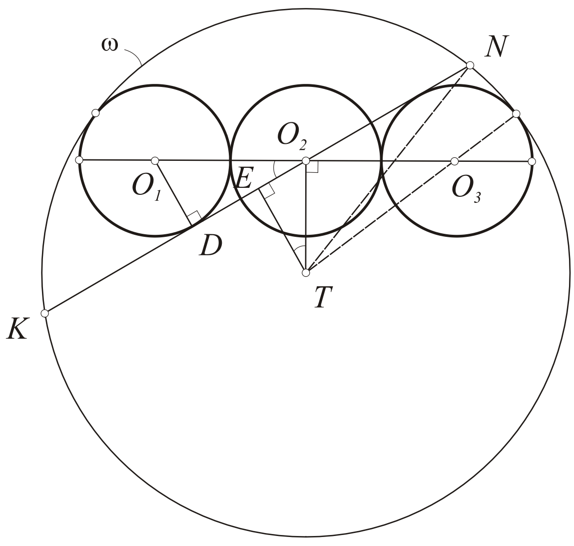

рис.12

<u>*Доказательство.*</u>

Рассмотрим прямоугольный ΔO_3O_2T *(рис.12)*. В нем $TO_3 = R - r$; $O_2O_3 = 2r$. Тогда $O_2T^2 = (R-r)^2 - (2r)^2 = R^2 - 2Rr - 3r^2$ *(1)*.

Так как $\Delta TEO_2 \sim \Delta O_2DO_1$, то $\dfrac{TE}{TO_2} = \dfrac{O_2D}{O_1O_2}$, где $O_2D = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1D^2} = \sqrt{4r^2 - r^2} = r\sqrt{3}$; $O_1O_2 = 2r$, откуда $TE = TO_2 \cdot \dfrac{r\sqrt{3}}{2r} = TO_2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Из ΔTEN $NE^2 = TN^2 - TE^2 = R^2 - \dfrac{3}{4}O_2T^2$. Так как $O_2T^2 = R^2 - 2Rr - 3r^2$ (из равенства *(1)*), то $NE^2 = R^2 - \dfrac{3}{4}(R^2 - 2Rr - 3r^2)$. Поскольку $KN = 2NE$, то $KN^2 = 4NE^2 = 4R^2 - 3R^2 + 6Rr + 9r^2$; $N^2 = R^2 + 6Rr + 9r^2 = (R+3r)^2$ и $\boxed{KN = R + 3r}$.

Задача 11.

Даны три равные окружности, не имеющие общих точек. Постройте окружность *ω*, касающуюся:

а) всех трех внешним образом;

б) одной из них внешним образом, а двух других – внутренним;

в) одной из них – внутренним образом и двух других – внешним.

<u>*Решение.*</u>

а) Пусть даны три равные окружности с центрами $O_1;O_2;O_3$. Пусть также серединные перпендикуляры к отрезкам O_1O_2 и O_1O_3 пересекаются в точке Q *(рис.13)*. Тогда $QO_1 = QO_2 = QO_3$. И Окружность s с центром Q радиуса QO_1 пройдет через центры всех трех окружностей. Построим окружность, концентрическую окружности s и уменьшенную по сравнению с окружностью s на r – радиус любой из трех равных окружностей. Очевидно, она совпадет с искомой окружностью *ω*.

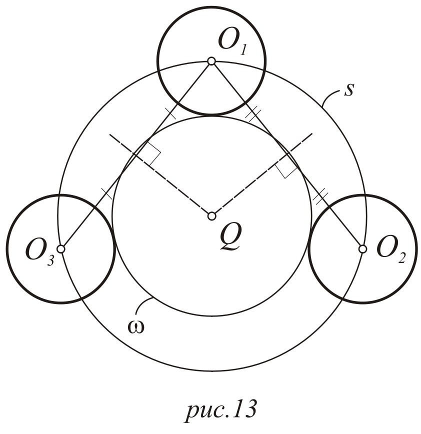

рис.13

б) Решим сначала вспомогательную задачу, составленную Аполлонием: *построить окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной окружности.*

Пусть даны точки A и B и окружность s. Необходимо построить окружность ω, проходящую через A и B и касающуюся s. Построим (произвольно) окружность ω_1, проходящую через A и B и пересекающую s, скажем, в точках K и N *(рис.14)*. Обозначим через T точку пересечения прямых BA и KN. Однако и искомая окружность ω должна проходить через точки A и B. Тогда *по теореме о квадрате касательной* для окружности ω_1 имеем: $TB\cdot TA = TK\cdot TN$. Но $TB\cdot TA = TC_1^2$ – для окружности ω, где TC_1 – касательная к ω. А с другой стороны, $TK\cdot TN = TC_2^2$ для окружности s, где TC_2 – касательная к s. Остается провести из точки T касательную TC к окружности s (точки C_1, C_2, C совпадают). Окружность, проходящая через точки $A;B;C$, совпадает с искомой окружностью ω.

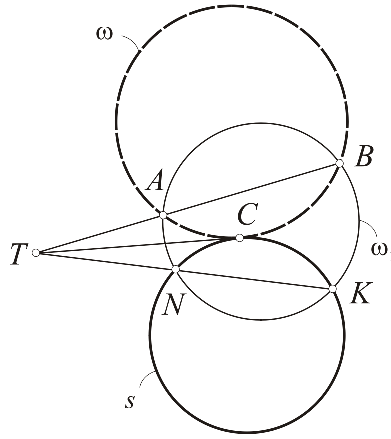

рис.14

Вернемся к задаче пункта *б)*.

Анализ показывает, что если ω – искомая окружность, то концентрическая с ней окружность ω_1, уменьшенная на радиус r любой из равных окружностей, проходит через центры окружностей O_2 и O_3 *(рис.14)*. Вместе с тем, ω_1 касается внешним образом окружности s концентрической с окружностью O_1 и увеличенной на r. Тогда задача сводится к построению окружности ω_1, проходящей через точки O_2 и O_3 и касающейся окружности s (окружность s легко построить!..).

Теперь остается построить окружность ω, концентрическую окружность ω_1 и большую, чем она, на r.

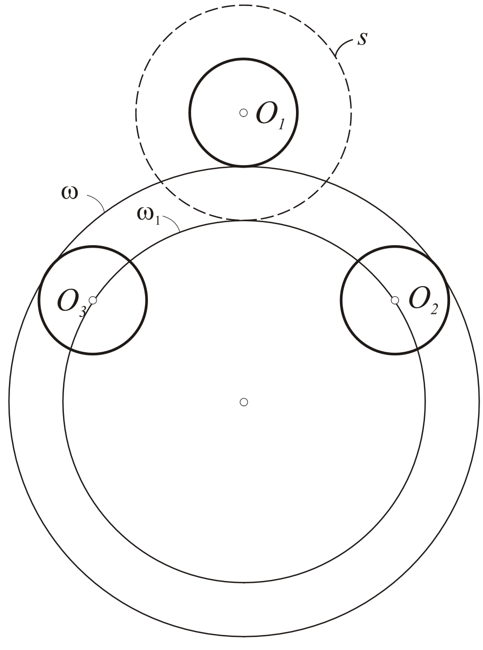

рис.15

в) Пусть необходимо построить окружность ω, касающуюся внутренним образом O_1 и внешним – O_2 и O_3. Отразим окружность O_1 симметрично относительно серединного перпендикуляра к отрезку O_2O_3 *(рис.16)*. Получим окружность s с центром O_1'. При этом s и ω также должны иметь внутреннее касание (из соображений симметрии). Тогда, не принимая во внимание, скажем, окружность O_2, нам необходимо построить окружность ω, касающуюся внешним образом окружности O_3 и внутренним образом – окружностей O_1 и s. А это – *задача пункта б)*.

<u>Замечание.</u> Если центр окружности O_1 находится на серединном перпендикуляре к отрезку O_2O_3, то построение окружности ω выполняется, как показано на *рис.17*. Укажем порядок операций:

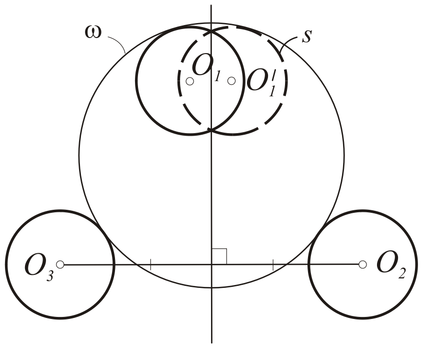

рис.16

1) общая внешняя касательная BC к окружностям O_2 и O_3;
2) серединный перпендикуляр к O_2O_3 вторично пересекает O_1 в точке A. K – точка пересечения AB и окружности O_2. N – точка пересечения AC и окружности O_3.
3) окружность, проходящая через точки A; K и N, совпадает с искомой окружностью ω. Для того, чтобы показать это,

можно воспользоваться *леммой Архимеда о параллельных диаметрах* [2].

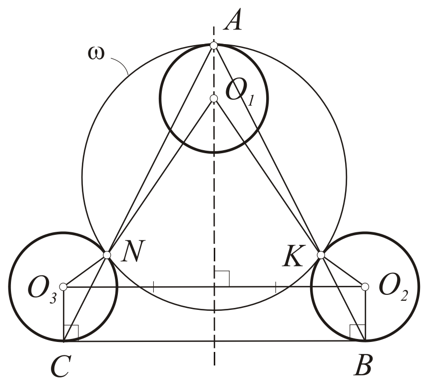

рис.17

Несколько задач с участием трех равных окружностей предложим решить самостоятельно.

Задача 12. В данный равносторонний треугольник впишите три равные окружности, чтобы они касались друг друга и каждый - двух сторон угла.

Задача 13. Около треугольника *ABC* описана окружность *s*. Пусть *G; Q; T* - центры окружностей, симметричных окружности s относительно сторон треугольника *ABC*. Докажите, что треугольники *ABC* и *GQT* равны и что у них - общая окружность Эйлера (окружность 9-ти точек).

Задача 14. В данную окружность впишите три равных окружности, касающихся первой и друг друга.

Задача 15. Три равные окружности пересекаются в точке *T*. *A;.B; C* - их вторые точки пересечения. Известно, что *AT* = *BC*. Найдите величину угла *BAC*.

Задача 16. Три равные окружности радиуса *r* касаются внутренним образом окружности радиуса *R*, а также друг друга. Выразите *r* через *R*.

Задача 17. На стороне *BC* треугольника *ABC* взяты точки *K* и *M* таким образом, что радиусы вписанных в треугольники *ABK, AKM* и *AMC* окружностей, равны. Докажите, что равны и радиусы окружностей, вписанных в треугольники *ABM* и *AKC* (*Сангаку*).

Задача 18. В прямоугольнике *ABCD* размещены три равные окружности радиуса r с центрами *G; Q* и *T*. Окружности *Q* и *T* вписаны в углы *BAD* и *CDA* соответственно. *A* окружность *G* касается их и стороны *BC*. Выразите *r* через стороны прямоугольника, равные *a* и *b* (*Сангаку*).

Литература.

1. Акопян А.В. Геометрия в картинках. - Москва, 2011.
2. Билецкий Ю., Филипповский Г. Чертежи на песке. В мире геометрии Архимеда. - К.: Факт, 2000.
3. Васильев Н.Б., Егоров А.А. Задачи Всесоюзных математических олимпиад. - М.: Наука, 1988.
4. Карлюченко А.В., Карлюченко О.А. Сангаку. Японская храмовая геометрия. - К.: Сталь, 2012.
5. Кушнир И.А. Геометрия на баррикадах-2. - К.: Знання Украины, 2011.
6. Прасолов В.В. и др. Московские математические олимпиады 1935-1957. - М.: МЦНМО, 2010.
7. Юзбашев А.В. Свойства геометрических фигур - ключ к решению любых задач по планиметрии. - М.: Просвещение, 2009.