Про відстані від вершини трикутника до його чудових точок

О. Карлюченко та Г. Філіпповський

У статті піде розмова про властивості відрізків, які з'єднують вершину A трикутника ABC з однією з чудових точок цього трикутника: точкою перетину висот H, точкою перетину медіан M, точкою перетину бісектрис I, центром описаного кола O, центром кола Ойлера (кола дев'яти точок) E.

I. Відрізок AH.

Властивість 1. $AH = 2OM_1$, де M_1 — середина сторони BC.

Доведення. Проведемо діаметр BD кола ω, описаного навколо трикутника ABC (рис. 1). Тоді $\angle DCB = \angle DAB = 90^\circ$ (вписані, спираються на діаметр). Тому $DC \parallel AH$ та $AD \parallel CH$. Отже, $ADCH$ — паралелограм та $DC = AH$. Але $DC = 2OM_1$, оскільки OM_1 — середня лінія трикутника BDC. Отже, $AH = 2OM_1$.

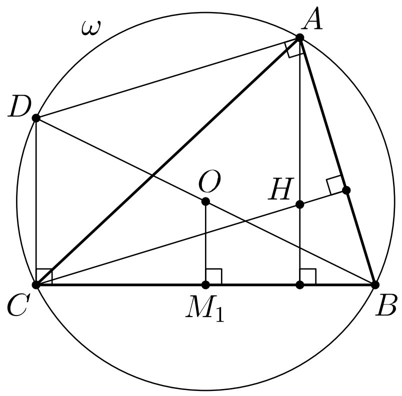

рис. 1

Властивість 2. $AH^2 = 4R^2 - a^2$, де R — радіус описаного кола трикутника ABC та $BC = a$.

Доведення. Розглянемо прямокутний трикутник BOM_1 (рис. 1), в якому $BO = R$ та $BM_1 = \frac{a}{2}$. За теоремою Піфагора знаходимо $OM_1^2 = BO^2 - BM_1^2 = R^2 - \frac{a^2}{4}$. Оскільки $AH^2 = 4OM_1^2$ (властивість 1), то $AH^2 = 4R^2 - a^2$.

Властивість 3. $AH = 2R \cdot |\cos A|$.

Доведення. Нехай $\angle BAC \leq 90^\circ$. Оскільки $\angle BOC = 2A$ — центральний кут (рис. 1) та $BO = CO = R$, то $\angle COM_1 = \angle BOM_1 = A$. Тоді з прямокутного трикутника BOM_1 дістаємо, що $OM_1 = R \cdot \cos A$. Якщо $\angle BAC > 90^\circ$, то аналогічно $\angle BOC = 360^\circ - 2A$, $\angle BOM_1 = 180^\circ - A$ та $OM_1 = R \cdot \cos(180^\circ - A) = R \cdot |\cos A|$. Отже, у всіх випадках $AH = 2OM_1 = 2R \cdot |\cos A|$.

Властивість 4. $AH = a \cdot |\operatorname{ctg} A|$.

Доведення. За властивістю 3 маємо $AH = 2R \cdot |\cos A|$. Залишається підставити $2R = \frac{a}{\sin A}$ (теорема синусів).

Властивість 5. $AH = 2R + r - r_a$ (r — радіус вписаного кола трикутника ABC, r_a — радіус зовнівписаного кола, яке дотикається до сторони BC і продовжень двох інших сторін).

Доведення. Нехай I, I_a — центри вписаного та зовнівписаного кіл, які дотикаються до сторони BC у точках K та T відповідно (рис. 2). Тоді $IK = r$, $I_aT = r_a$. Нехай також W — точка перетину бісектриси кута A з колом ω та N — точка перетину TI з OW. Оскільки $\smile BW = \smile CW$, то $O - M_1 - W$ — одна пряма. Неважко показати, що $BK = CT$. Тоді $TM_1 = M_1K$. Очевидно, що NW — середня лінія трикутника ITI_a (з рівності $TM_1 = M_1K$ випливає рівність відрізків IW та WI_a). Отже, $NW = \frac{r_a}{2}$. Але NM_1 — середня лінія трикутника TIK, тому $NM_1 = \frac{r}{2}$ та $M_1W = \frac{r_a - r}{2}$. Оскільки $OW = R$, то $OM_1 = R - \frac{r_a - r}{2}$, звідки $AH = 2OM_1 = 2R + r - r_a$, що завершує доведення.

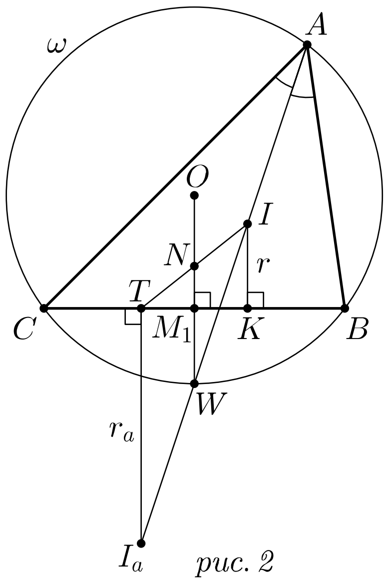

рис. 2

Окремі випадки.

Задача 1. У трикутнику ABC відрізок AH дорівнює стороні BC. Знайти величину кута A.

Розв'язання. За властивістю 4 маємо $AH = a \cdot |\operatorname{ctg} A|$. Згідно з умовою $a = a \cdot |\operatorname{ctg} A|$, звідки $|\operatorname{ctg} A| = 1$. Тому $A = 45°$ або $A = 135°$. І навпаки, у довільному трикутнику ABC з кутом $A = 45°$ або $A = 135°$ за властивістю 4 буде $AH = a$.

Задача 2. Знайти величину кута A трикутника ABC, якщо відомо, що $AH = R$.

Розв'язання. За властивістю 3 маємо $R = 2R \cdot |\cos A|$, звідки $|\cos A| = \frac{1}{2}$. Тоді $A = 60°$ або $A = 120°$. І навпаки, у довільному трикутнику ABC з кутом $A = 60°$ або $A = 120°$ за властивістю 3 буде $AH = a$.

Задача 3. У гострокутному трикутнику ABC відомо, що $AH = R$. Доведіть, що $IO = IH$.

Доведення. Неважко показати, що

$$\angle BAH = \angle CAO = 90° - B.$$

Звідси випливає, що промінь AI є спільною бісектрисою кутів $\angle BAC$ та $\angle HAO$, а отже $\angle HAI = \angle IAO$ (рис. 3). Тоді трикутники HAI та OAI рівні за двома сторонами та кутом між ними, звідки $IO = IH$.

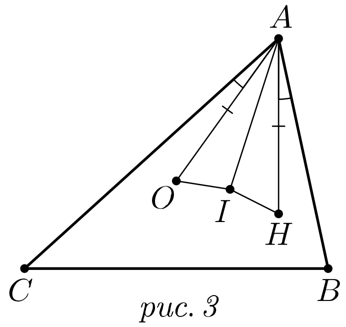

рис. 3

Задача 4. У гострокутному трикутнику ABC відомо, що $AH = 2r$. Доведіть, що $OI \parallel BC$.

Доведення. Якщо $AH = 2r$, то $OM_1 = \frac{1}{2}AH = r$. Точки O та I знаходяться по одну сторону від прямої BC на однаковій відстані від неї (рівній r). Отже, $OI \parallel BC$.

Задача 5. У гострокутному трикутнику ABC відомо, що $AH = r$. Доведіть, що точки M_1, I, H лежать на одній прямій.

Доведення. Нехай пряма M_1I перетинає висоту AH_1 у точці F. Покажемо, що $AF = r$. Оскільки $AH = r$, то звідси випливатиме, що точки H та F збігаються, тобто H лежить на прямій M_1I. Нехай W — точка перетину бісектриси кута A з описаним колом трикутника ABC та K — точка дотику вписаного у трикутник ABC кола зі стороною AC. Неважко перевірити, що трикутники AFI та WM_1I, AKI та BM_1W подібні (рис. 4). Тому $AF : M_1W = AI : IW$ та $KI : M_1W = AI : BW$. Оскільки $BW = IW$ (теорема про "тризуб"), то звідси $AF = KI = r$.

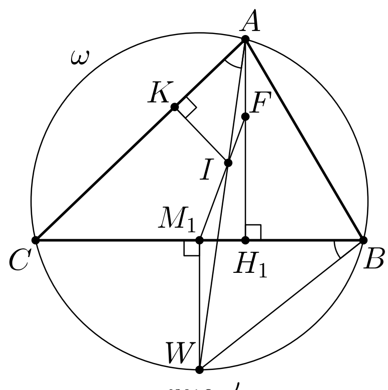

рис. 4

II. Відрізок AM.

Властивість 6. $AM = \frac{2}{3}m_a$, де $m_a = AM_1$ — медіана трикутника ABC.

Доведення. Це так, оскільки медіани трикутника перетинаються в одній точці та діляться нею у відношенні $2:1$, рахуючи від вершини.

Властивість 7. $AM^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{9}$.

Доведення. Ця формула випливає з формули довжини медіани $m_a^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$, бо $AM = \frac{2}{3}m_a$.

Властивість 8. $AM^2 \geq \frac{4}{9}\,p(p-a)$, де $p = \frac{a+b+c}{2}$ — півпериметр трикутника.

Доведення. Внаслідок властивості 7 маємо

$$\begin{aligned}9AM^2 - 4p(p-a) =& 2(b^2+c^2) - a^2 - 4\cdot\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2} = \\ =& 2b^2 + 2c^2 - a^2 - ((b+c)^2 - a^2) = (b-c)^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Окремі випадки.

Задача 6. Нехай $AM = a$. Доведіть, що медіани, проведені з вершин B та C, перпендикулярні.

Доведення. Нехай AM_1, BM_2 та CM_3 — медіани трикутника (рис. 5). За умовою $MM_1 = \frac{AM}{2} = \frac{BC}{2}$. Отже, у трикутнику BMC медіана, проведена до сторони BC, дорівнює половині цієї сторони. Звідси випливає, що $\angle BMC = 90^\circ$.

Задача 7. Нехай $AM = a$. Доведіть, що $b^2 + c^2 = 5a^2$.

Доведення. Якщо $AM = a$, то за властивістю 7 маємо $a^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{9}$, або $9a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$, звідки $b^2 + c^2 = 5a^2$.

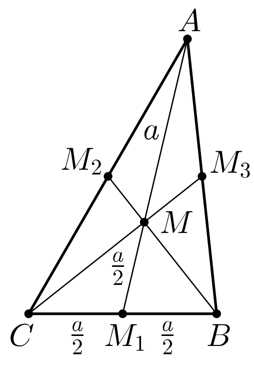

рис. 5

Задача 8. Нехай $AM = R$. Доведіть, що $A \leq 60^\circ$.

Доведення. За нерівністю трикутника для відстаней між точками A, O, M_1 маємо $AO + OM_1 \geq AM_1$ (рис. 6). Оскільки $AO = R$, $AM_1 = \frac{3}{2}AM = \frac{3}{2}R$ та $OM_1 = R|\cos A|$, то $R + R|\cos A| \geq \frac{3}{2}R$, або $|\cos A| \geq \frac{1}{2}$, звідки $A \leq 60^\circ$ або $A \geq 120^\circ$. Але якщо кут A тупий, то точка A лежить всередині кола, побудованого на BC як на діаметрі. Тоді $AM_1 < \frac{1}{2}BC \leq R$, що суперечить рівності $AM_1 = \frac{3}{2}R$. Отже, можливий лише випадок $A \leq 60^\circ$.

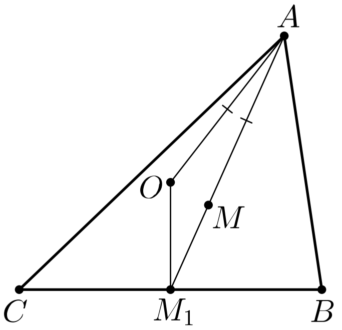

рис. 6

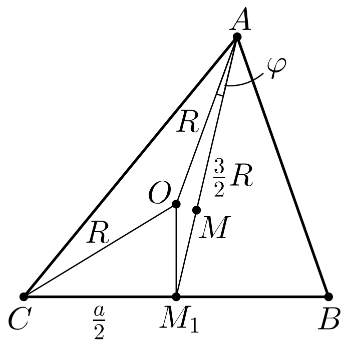

рис. 7

Задача 9. Нехай $AM = R$. Доведіть, що $\cos\varphi = \frac{b^2+c^2}{6R^2}$, де $\varphi = \angle OAM$.

Доведення. Оскільки $R^2 = AM^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{9}$ (властивість 7), то $2(b^2+c^2) = 9R^2+a^2$. За теоремою косинусів для трикутника OAM_1 та за теоремою Піфагора для трикутника OCM_1 (рис. 7) знаходимо

$$OM_1^2 = R^2 + \frac{9}{4}R^2 - 3R^2\cos\varphi = R^2 - \frac{a^2}{4}.$$

Звідси

$$\cos\varphi = \frac{9R^2+a^2}{12R^2} = \frac{2(b^2+c^2)}{12R^2} = \frac{b^2+c^2}{6R^2}.$$

Задача 10. Чи існує трикутник ABC, в якому $AM = r$?

Розв'язання. У будь-якому трикутнику ABC медіана m_a не коротша за висоту h_a, тому $m_a \geq h_a > 2r$. Звідси $AM = \frac{2}{3}m_a > \frac{4}{3}r$ та рівність $AM = r$ неможлива.

Задача 11. У нерівнобедреному трикутнику ABC відомо, що $AM = 2r$. Яка з точок ближче до сторони BC: I чи M?

Розв'язання. Оскільки $MM_1 = \frac{1}{2}AM = r$, то відстань від точки M до прямої BC менша за BC (довжина перпендикуляра менша за довжину похилої). А відстань від точки I до прямої BC дорівнює r. Отже, точка M ближче.

Задача 12. Нехай $AM = MD$, де D — точка перетину променя AM з описаним навколо трикутника ABC колом. Довести, що квадрати сторін трикутника ABC утворюють арифметичну прогресію.

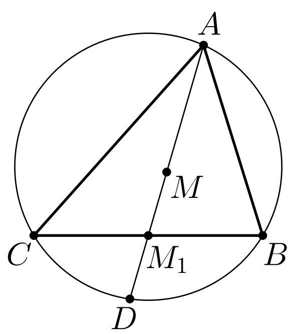

рис. 8

Доведення. Оскільки M — середина AD та $AM_1 = \frac{3}{2}AM$, то $DM_1 = 2AM - AM_1 = \frac{1}{2}AM$ (рис. 8). Тоді для хорд BC та AD маємо

$$BM_1 \cdot CM_1 = \frac{a^2}{4} = AM_1 \cdot DM_1 = \frac{3}{4}AM^2.$$

Враховуючи, що $AM^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{9}$ (властивість 7), дістаємо, що $\frac{a^2}{4} = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{12}$, звідки $3a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$, або $2a^2 = b^2 + c^2$, тобто b^2, a^2, c^2 — арифметична прогресія.

III. Відрізок $AO = R$.

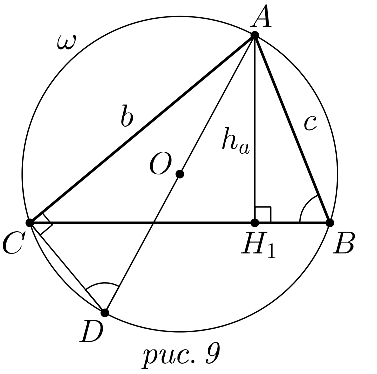

рис. 9

Властивість 9. $AO = \frac{a}{2\sin A}$ (теорема синусів).

Властивість 10. $AO = \frac{bc}{2h_a}$.

Доведення. Нехай коло ω описане навколо трикутника ABC (рис. 9). Проведемо діаметр AD. Прямокутні трикутники ABH_1 та ADC подібні за двома кутами. Тоді $\frac{b}{h_a} = \frac{2R}{c}$, або $bc = 2Rh_a$ (формула Брахмагупти). Отже, $AO = R = \frac{bc}{2h_a}$.

Властивість 11. $AO = \frac{abc}{4S}$.

Властивість 12. $AO \geq 2r$.

Доведення. Згідно з формулою Ойлера $OI^2 = R^2 - 2Rr = R(R - 2r) \geq 0$. Тому $R - 2r \geq 0$, або $AO = R \geq 2r$.

Окремі випадки.

Задача 13. Нехай $AO = a$. Знайдіть величину кута A.

Розв'язання. За теоремою синусів $AO = \frac{a}{2\sin A}$. Отже, рівність $a = \frac{a}{2\sin A}$ виконується тоді й лише тоді, коли $\sin A = \frac{1}{2}$, тобто при $A = 30°$ або $A = 150°$.

Задача 14. Визначте вид трикутника ABC, в якому $AO = 2r$.

Розв'язання. За формулою Ойлера $OI^2 = R^2 - 2Rr = 4r^2 - 4r^2 = 0$. Отже, точки O та I збігаються, а це можливо лише у рівносторонньому трикутнику.

IV. Відрізок AI.

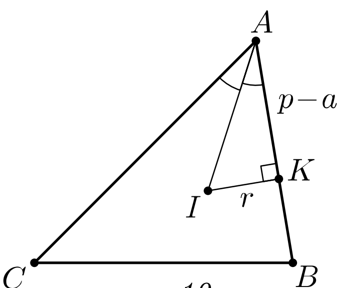

рис. 10

Властивість 13. а) $AI = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}$; б) $AI = \frac{p-a}{\cos\frac{A}{2}}$.

Доведення. Нехай K — точка дотику вписаного у трикутник ABC кола зі стороною AB. Тоді трикутник AIK прямокутний, $IK = r$ та $AK = p - a$ (рис. 10), звідки $r = AI\sin\frac{A}{2}$ та $p - a = AI\cos\frac{A}{2}$.

Властивість 14. $AI = \sqrt{bc(p-a)/p}$.

Доведення. Перемножимо ліві та праві частини рівностей із пунктів а) та б) властивості 13:

$$AI^2 = \frac{r(p-a)}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} = \frac{2r(p-a)}{\sin A} = \frac{2bcpr(p-a)}{bcp\sin A} = \frac{2bcS(p-a)}{2Sp} = \frac{bc(p-a)}{p}.$$

Звідси $AI = \sqrt{bc(p-a)/p}$.

Властивість 15. $AI = \frac{b+c}{a} \cdot IL_1$, де AL_1 — бісектриса кута A.

Доведення. За властивістю бісектриси $\frac{b}{c} = \frac{CL_1}{BL_1} = \frac{CL_1}{a - CL_1}$, звідки $CL_1 = \frac{ab}{b+c}$ (рис. 11). Оскільки CI — бісектриса трикутника ACL_1, то знову за властивістю бісектриси дістаємо

$$\frac{AI}{IL_1} = \frac{b}{CL_1} = \frac{b}{\frac{ab}{b+c}} = \frac{b+c}{a},$$

тобто $AI = \frac{b+c}{a} \cdot IL_1$.

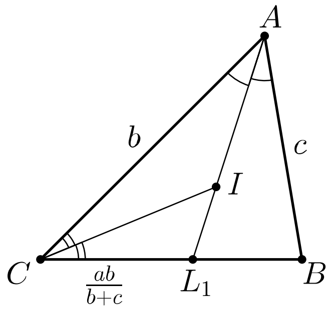

рис. 11

Властивість 16. $AI = AL_1 \cdot \frac{b+c}{2p}$.

Доведення. За властивістю 15 маємо $\frac{AI}{IL_1} = \frac{b+c}{a}$, або $\frac{IL_1}{AI} = \frac{a}{b+c}$. Тоді

$$\frac{IL_1}{AI} + 1 = \frac{a}{b+c} + 1, \quad \frac{IL_1 + AI}{AI} = \frac{AL_1}{AI} = \frac{a+b+c}{b+c} = \frac{2p}{b+c}.$$

Звідси $AI = AL_1 \cdot \frac{b+c}{2p}$.

Властивість 17. $AI^2 = bc - 4Rr$.

Доведення. Згідно із властивістю 14 маємо

$$AI^2 = \frac{bc(p-a)}{p} = bc - \frac{abc}{p} = bc - \frac{4SR}{p} = bc - \frac{4prR}{p} = bc - 4Rr.$$

Властивість 18. а) $AI = \frac{bc}{AI_a}$; б) $AI = \frac{2Rh_a}{AI_a}$.

Доведення. Оскільки CI — бісектриса кута C трикутника ABC, а CI_a — бісектриса суміжного з ним зовнішнього кута, то $\angle ICI_a = 90^\circ$ (рис. 12). Але $\angle CII_a = \frac{A+C}{2}$ (зовнішній кут трикутника AIC), тому третій кут трикутника ICI_a дорівнює $\frac{B}{2}$. Отже, трикутники ABI та AI_aC подібні за двома кутами. Таким чином, $\frac{AI}{b} = \frac{c}{AI_a}$, тобто $AI = \frac{bc}{AI_a}$.

Звідси одразу дістаємо рівність б), оскільки $bc = 2R \cdot h_a$ (властивість 10).

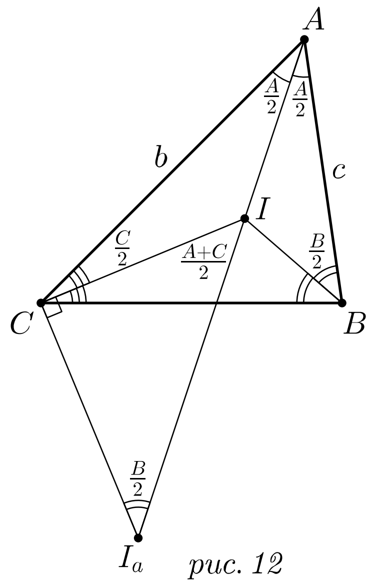

рис. 12

Окремі випадки.

Задача 15. Нехай $AI = a$. Доведіть, що площа трикутника ABC дорівнює $S = \frac{r^3}{2a-p}$.

Доведення. За теоремою Піфагора $AI^2 = r^2 + (p-a)^2$ (рис. 10). Враховуючи, що $AI = a$, дістаємо $r^2 = a^2 - (p-a)^2 = (2a-p) \cdot p$, $r^3 = (2a-p) \cdot S$ та $S = \frac{r^3}{2a-p}$.

Задача 16. Нехай $AI = R$. Доведіть, що $AI_a = 2h_a$.

Доведення. За властивістю 18 маємо $AI = \frac{2Rh_a}{AI_a}$. Отже, $R = \frac{2Rh_a}{AI_a}$ та $AI_a = 2h_a$.

Задача 17. Нехай $AI = R$. Доведіть, що величина кута A не перевищує $60°$.

Доведення. Нехай K — точка дотику вписаного у трикутник ABC кола зі стороною AB (рис. 13). Тоді $\sin\frac{A}{2} = \frac{IK}{AI} = \frac{r}{R}$. Оскільки $r \le \frac{R}{2}$ (властивість 12), то $\sin\frac{A}{2} \le \frac{1}{2}$. Звідси $\frac{A}{2} \le 30°$, тобто $A \le 60°$.

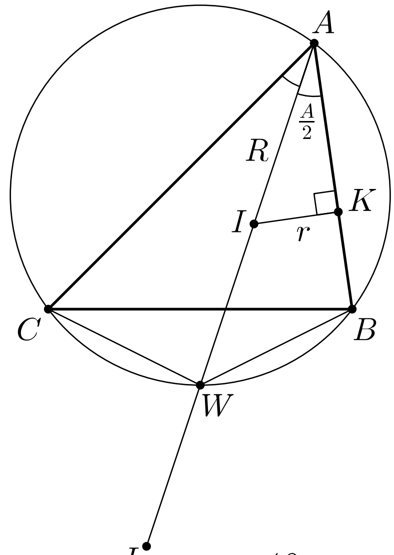

рис. 13

Задача 18. Нехай $AI = R$. Доведіть, що відстань між центром вписаного у трикутник ABC кола та центром зовнівписаного кола, яке дотикається до сторони BC, дорівнює $4r$.

Доведення. За теоремою синусів для трикутника ABW маємо $\frac{BW}{\sin\frac{A}{2}} = 2R$ (рис. 13). Тому

$$BW = 2R\cdot\sin\frac{A}{2} = 2R\cdot\frac{r}{R} = 2r.$$

Оскільки $BW = CW = IW = WI_a$ (теорема про "тризуб"), то $II_a = 4r$.

Задача 19. Нехай $AI = 2r$. Доведіть, що $A = 60°$.

Доведення. За властивістю 13а) маємо $AI = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}$. Тому $\sin\frac{A}{2} = \frac{1}{2}$, звідки $\frac{A}{2} = 30°$ та $A = 60°$.

Задача 20. Нехай $AI = 2IL_1$. Доведіть, що а) $b + c = 2a$; б) $MI \parallel BC$.

Доведення. а) За властівістю 15 маємо $AI = \frac{b+c}{a}\cdot IL_1$. Отже, $2IL_1 = \frac{b+c}{a}\cdot IL_1$, або $b + c = 2a$.

б) Оскільки $\frac{AI}{IL_1} = 2$ (за умовою) та $\frac{AM}{MM_1} = 2$ (медіани діляться точкою перетину у відношенні $2:1$, рахуючи від вершини), то $MI \parallel BC$.

V. Відрізок AE, де E — центр кола Ойлера.

Добре відомо, що у довільному трикутнику основи медіан M_1, M_2, M_3, основи висот H_1, H_2, H_3 та E_1, E_2, E_3 — середини відрізків AH, BH, CH відповідно — лежать на одному колі, яке називають колом дев'яти точок або колом Ойлера (рис. 14). Оскільки OM_1, HH_1 та серединний перпендикуляр до M_1H_1 паралельні, то цей серединний перпендикуляр проходить через середину OH. Аналогічно через середину OH проходять серединні перпендикуляри до M_2H_2 та M_3H_3, тому центр кола Ойлера E є серединою відрізка OH.

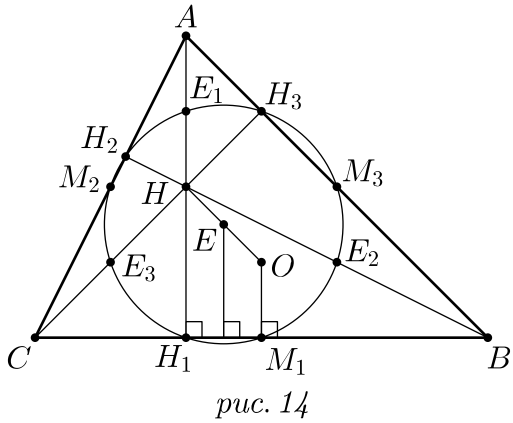

рис. 14

Властивість 19. $AE^2 = \frac{R^2+b^2+c^2-a^2}{4}$.

Доведення. Покажемо, що точка перетину медіан M належить відрізку OH. Справді, оскільки $AH \parallel OM_1$, то $\angle HAM = \angle OM_1M$ (рис. 15), а з властивості 1 випливає, що $AH : M_1O = AM : M_1M = 2 : 1$. Тому трикутники AHM та M_1OM подібні, звідки $\angle AMH = \angle M_1MO$, тобто $H - M - O$ — одна пряма. Одночасно ми дістали, що $HM = 2MO$. Відмітимо на відрізку OH також точку N, для якої $HN = NM = MO$. Тоді N — середина HM та M — середина NO.

Запишемо для трикутників AHM та AON формулу довжини медіани:

$$AN^2 = \frac{2(AH^2+AM^2)-HM^2}{4}, \quad AM^2 = \frac{2(AN+AO^2)-NO^2}{4}.$$

Зауважимо, що квадрати довжин відрізків AO, AH та AM відомі:

$$AO^2 = R^2,\ AH^2 = 4R^2 - a^2,\ AM^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{9}$$

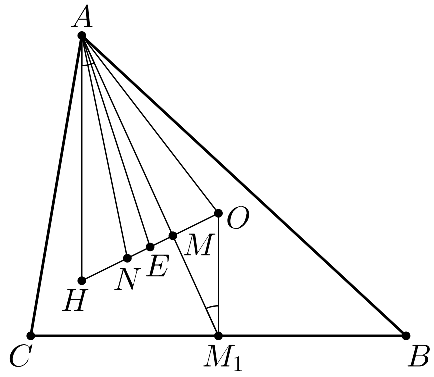

рис. 15

(властивості 2 і 7). Позначимо $HM^2 = NO^2 = x$, $AN^2 = y$. Тоді

$$\begin{cases} 4y = 2AH^2 + 2AM^2 - x, \\ 4AM^2 = 2y + 2AO^2 - x, \end{cases} \quad \text{звідки} \quad \begin{cases} x = \frac{2AH^2-6AM^2+4AO^2}{3}, \\ y = \frac{AH^2+3AM^2-AO^2}{3}. \end{cases}$$

Таким чином, $OH^2 = \left(\frac{3}{2}HM\right)^2 = \frac{9}{4}x = \frac{3}{2}AH^2 - \frac{9}{2}AM^2 + 3AO^2 =$

$$= \frac{3}{2}(4R^2 - a^2) - \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{2} + 3R^2 = 9R^2 - a^2 - b^2 - c^2.$$

Оскільки E — середина відрізка OH, то за формулою довжини медіани

$$AE^2 = \frac{2(AO^2+AH^2)-OH^2}{4} = \frac{2(R^2+4R^2-a^2)-(9R^2-a^2-b^2-c^2)}{4} = \frac{R^2+b^2+c^2-a^2}{4}.$$

Окремі випадки.

Задача 21. Знайдіть кут A трикутника ABC, в якому $AE^2 = \frac{a^2+b^2+c^2-5R^2}{4}$.

Розв'язання. За властивістю 19 маємо $\frac{a^2+b^2+c^2-5R^2}{4} = \frac{R^2+b^2+c^2-a^2}{4}$. Після очевидних перетворень дістаємо, що $a = R\sqrt{3}$. Але за теоремою синусів $a = 2R\sin A$. Отже, $2R\sin A = R\sqrt{3}$ та $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Тоді $A = 60^\circ$ або $A = 120^\circ$.

Задача 22. Нехай $AE = \frac{R}{2}$. Доведіть, що трикутник ABC прямокутний.

Доведення. За властивістю 19 маємо $AE^2 = \frac{R^2+b^2+c^2-a^2}{4} = \frac{R^2}{4}$, отже $b^2 + c^2 = a^2$.

VI. Який із відрізків більший?

Спробуємо з'ясувати, який із відрізків більший: від вершини до чудової точки або його продовження — від чудової точки до сторони трикутника. Чи завжди це можна визначити однозначно?

Задача 23. Який із відрізків більший: AM чи MM_1?

Розв'язання. Відрізок AM більше вдвічі, адже $\frac{AM}{MM_1} = 2$.

Задача 24. Що більше: AI чи IL_1?

Розв'язання. За властивістю 11 маємо $\frac{AI}{IL_1} = \frac{b+c}{a}$. Але $b + c > a$ (нерівність трикутника). Тому $AI > IL_1$.

Задача 25. Нехай промінь AO перетинає BC у точці N. Що більше: AO чи ON?

Розв'язання. Точка N знаходиться всередині описаного кола трикутника ABC. Тому $ON < R$, а оскільки $AO = R$, то $AO > ON$.

Задача 26. Що більше: AH чи HH_1?

Розв'язання. Якщо $\angle A \geq 90°$, то $HH_1 > AH$, оскільки точка A належить відрізку HH_1. Якщо $\angle B \geq 90°$ або $\angle C \geq 90°$, то $AH > HH_1$, оскільки точка H_1 належить відрізку AH.

Нехай тепер трикутник ABC гострокутний. Тоді $AH = 2R\cos A$, $BH = 2R\cos B$ (властивість 3). Оскільки $\angle CBH_2 = 90° - C$ (рис. 16), то $\angle BHH_1 = C$. Звідси дістаємо, що $HH_1 = BH\cos C = 2R\cos B\cos C$. Отже,

$$\frac{AH}{HH_1} = \frac{2R\cdot\cos A}{2R\cos B\cos C} = \frac{\cos A}{\cos B\cos C} = \frac{-\cos(B+C)}{\cos B\cos C} = \frac{\sin B\sin C - \cos B\cos C}{\cos B\cos C} = \operatorname{tg} B\operatorname{tg} C - 1.$$

Тому $AH > HH_1$ при $\operatorname{tg} B\operatorname{tg} C > 2$ та $AH < HH_1$ при $\operatorname{tg} B\operatorname{tg} C < 2$.

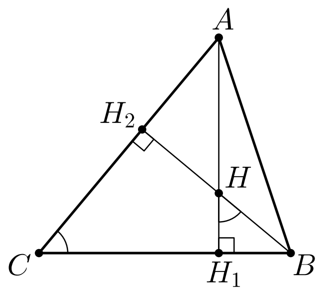

рис. 16

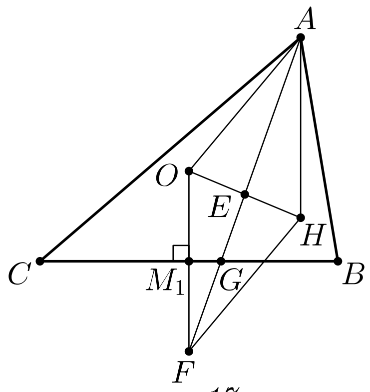

рис. 17

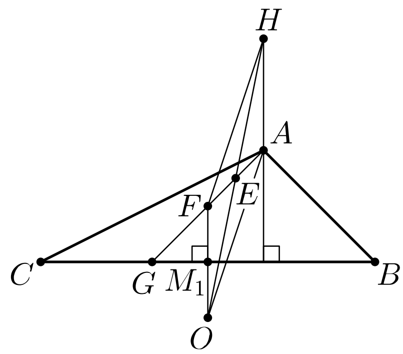

рис. 18

Задача 27. Нехай G — точка перетину прямих AE та BC. Що більше: AE чи EG?

Розв'язання. а) Нехай кут A гострий. Відкладемо на продовженні OM_1 відрізок $M_1F = OM_1$ (рис. 17). Оскільки $OM_1 = \frac{1}{2}AH$, то $OF = AH$ та $OF \parallel AH$, звідки $AOFH$ паралелограм. Точка E — середина діагоналі OH, тому E також є серединою діагоналі AF. Точки A та F знаходяться по різні сторони від BC, тому точка G лежить між A та F, звідки $EG < \frac{1}{2}AF = AE$. Отже, $AE > EG$.

б) Нехай кут A тупий. Відкладемо на продовженні OM_1 відрізок $M_1F = OM_1$ та знову дістанемо паралелограм $AOFH$, в якому E буде точкою перетину діагоналей (рис. 18). Точки A та F знаходяться по одну сторону від BC, тому точка G не належить відрізку AF та $EG > \frac{1}{2}AF = AE$. Отже, у цьому випадку $AE < EG$.

в) Нехай кут A прямий. Тоді точка H збігається з A, а точка O збігається з M_1. Оскільки E — середина OH, то E — середина AM_1, а точка G збігається з M_1. Звідси $AE = EG$.

VII. Куди ближче?

Нехай $A > B > C$ і відповідно $a > b > c$. Визначимо, найближче до якої з вершин розташована та або інша чудова точка.

Задача 28. До якої з вершин найближче точка O?

Розв'язання. До жодної! Адже $AO = BO = CO = R$.

Задача 29. До якої з вершин найближче точка H?

Розв'язання. За властивістю 2 маємо

$$AH^2 = 4R^2 - a^2,\ BH^2 = 4R^2 - b^2,\ CH^2 = 4R^2 - c^2.$$

Оскільки a — найбільша сторона, то відрізок AH найменший, тобто точка H розташована найближче до вершини найбільшого кута трикутника.

Задача 30. До якої з вершин найближче точка M?

Розв'язання. За властивістю 7

$$AM^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{9}, \quad BM^2 = \frac{2(a^2+c^2)-b^2}{9}, \quad CM^2 = \frac{2(a^2+b^2)-c^2}{9}.$$

Очевидно, що найменшим є відрізок AM. Точка M теж розташована найближче до вершини найбільшого кута.

Задача 31. До якої з вершин найближче точка I?

Розв'язання. За властивістю 17

$$AI^2 = bc - 4Rr, \quad BI^2 = ac - 4Rr, \quad CI^2 = ab - 4Rr.$$

Оскільки $a > b > c$, то величина $AI^2 = bc - 4Rr$ найменша. Точка I найближче до вершини найбільшого кута трикутника ABC.

Задача 32. До якої з вершин найближче точка E?

Розв'язання. З властивості 19 випливає, що і точка E найближче до вершини найбільшого кута. Справді,

$$AE^2 = \tfrac{R^2+b^2+c^2-a^2}{4} < BE^2 = \tfrac{R^2+a^2+c^2-b^2}{4} < CE^2 = \tfrac{R^2+a^2+b^2-c^2}{4}.$$

Наостанок пропонуємо цікаву рівність, яка пов'язує одразу чотири з "наших" відстаней.

Задача 33. Доведіть, що $8AE^2 + 2AO^2 = 9AM^2 + AH^2$.

Доведення. Під час доведення властивості 19 було встановлено, що

$$OH^2 = \tfrac{3}{2}AH^2 - \tfrac{9}{2}AM^2 + 3AO^2.$$

Оскільки AE — медіана трикутника AOH, то звідси

$$AE^2 = \tfrac{2(AO^2+AH^2)-OH^2}{4} = \tfrac{4(AO^2+AH^2)-3AH^2+9AM^2-6AO^2}{8} = \tfrac{AH^2-2AO^2+9AM^2}{8},$$

тобто $8AE^2 + 2AO^2 = 9AM^2 + AH^2$.