Теорема Птолемея и перекладывание треугольников

М.ГОРЕЛОВ

Начнем с двух старых задач. Первая из них много лет назад вошла в математический фольклор; например, она предлагалась на Московской математической олимпиаде 1940 года.

Задача 1. *Точки A, B, C – вершины вписанного в окружность равностороннего треугольника. Точка D лежит на меньшей дуге AB. Докажите, что DC = AD + BD.*

Решение. У этой задачи есть много красивых решений. Мы приведем решение, использующее вспомогательную площадь.

Вычислим двумя способами площадь S четырехугольника $ADBC$ (рис.1).

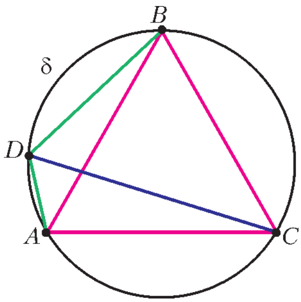

Рис. 1

С одной стороны, $S = \frac{1}{2} AB \cdot CD \cdot \sin\varphi$, где φ – угол между диагоналями четырехугольника. С другой стороны, площадь S равна сумме площадей треугольников ACD и BCD, поэтому

$$\frac{1}{2} AB \cdot CD \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2} AC \cdot AD \cdot \sin\angle CAD + \frac{1}{2} BC \cdot BD \cdot \sin\angle CBD .$$

Угол CAD вписанный, поэтому он равен $\frac{\pi}{3} + \frac{\delta}{2}$, где δ – величина дуги BD (по условию дуга BC равна $\frac{2\pi}{3}$). Четырехугольник $ADBC$ вписанный, поэтому $\angle CBD = \pi - \angle CAD$. Наконец, угол между диагоналями равен полусумме дуг AC и BD, т.е. $\frac{\pi}{3} + \frac{\delta}{2}$. Следовательно, $\sin\varphi = \sin\angle CAD = \sin\angle CBD$. Кроме того, по условию $AB = AC = BC$, откуда немедленно следует нужный результат.

Другое решение этой задачи (и упражнения 10) изложено в статье «Обобщение теоремы Помпею» этого номера журнала. *(Прим. ред.)*

Упражнение 1. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$: $\angle DAB = \angle DCB = 90°$ и $BC = CD$. Докажите, что $AC = \frac{AB + AD}{\sqrt{2}}$.

Задача 2 (задача М137 б) из «Задачника «Кванта»). *Последовательные стороны четырехугольника равны a, b, c, d (рис.2). Докажите, что его площадь не превосходит* $\frac{ac + bd}{2}$.

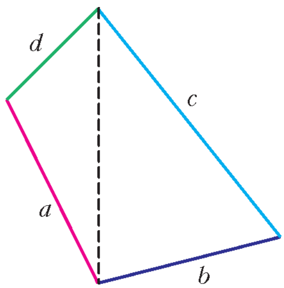

Рис. 2

Решение. Достаточно доказать неравенство для выпуклого четырехугольника (почему?). Разрежем четырехугольник по диагонали (см. рис.2), перевернем одну из частей «на другую сторону» и склеим обе части по линии разреза. Получим новый четырехугольник (рис.3) той же площади.

Если этот четырехугольник выпуклый, то его можно диагональю разбить на два треугольника, один из которых имеет стороны a и c, а другой – b и d. Он мог оказаться и невыпуклым, но тогда

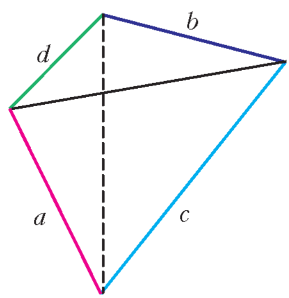

Рис. 3

он целиком покрывается одним из треугольников.

Осталось доказать, что площадь нового четырехугольника не превосходит $\frac{ac+bd}{2}$. Но это сразу следует из того, что новый четырехугольник можно разрезать диагональю на треугольник со сторонами a и c (площадь которого не превосходит $\frac{ac}{2}$) и треугольник со сторонами b и d (площадь которого не превосходит $\frac{bd}{2}$).

Задача 2 также относится к области математического фольклора, а трюк с «перекладыванием треугольника» был известен давно: например, он был красиво использован Адамаром в его классическом учебнике для вывода формул длин диагоналей вписанного четырехугольника.[1]

Упражнения

2. Приведите пример выпуклого четырехугольника, который после применения процедуры «перекладывания треугольника», использованной при решении задачи 2, превращается в невыпуклый.

3. Последовательные стороны четырехугольника равны a, b, c, d. Докажите, что его площадь $S \le \frac{(a+c)(b+d)}{4}$.

Указание. Достаточно использовать неравенства $S \le \frac{ab+cd}{2}$ и $S \le \frac{ad+cd}{2}$.

4. Опишите все четырехугольники, для которых неравенство задачи 2 превращается в равенство.

5. Многоугольник с данными длинами сторон вписан в окружность. Докажите, что его площадь не зависит от порядка, в котором стороны идут друг за другом.

«Сложив» идеи приведенных решений задач 1 и 2, можно получить доказательство следующей, совсем уж древней теоремы[2].

Теорема Птолемея. *Если четырехугольник ABCD вписанный, то*

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC .$$

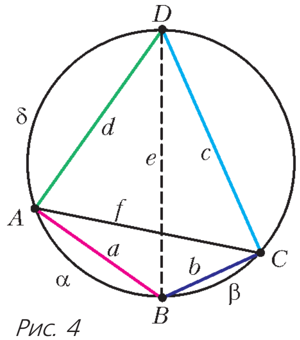

Рис. 4

Доказательство. Пусть $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = f$ и $BD = e$ (рис. 4).

Разрежем четырехугольник по диагонали BD, перевернем одну из частей на другую сторону и склеим части по линии разреза. Получим новый четырехугольник $ABC'D$, вписанный в ту же окружность (рис. 5).

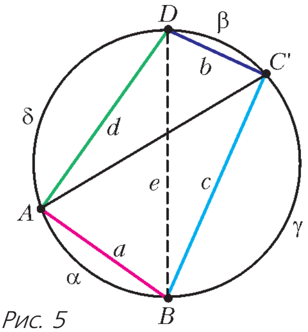

Рис. 5

Площадь четырехугольника $ABCD$ равна $\frac{1}{2}ef\sin\varphi$, где φ – угол между диагоналями AC и BD. А площадь четырехугольника $ABC'D$ равна

$$\frac{1}{2}ac\sin\angle ABC' + \frac{1}{2}bd\sin\angle ADC' .$$

Но угол φ равен полусумме дуг β и δ. И угол ABC' равен полусумме дуг β и δ. А $\angle ADC' = \pi - \angle ABC'$.

Остается воспользоваться тем, что площади четырехугольников $ABCD$ и $ABC'D$ равны, и упростить соответствующее равенство, разделив на $\sin\varphi$.

Теперь становится ясно, что утверждение задачи 1 фактически является частным случаем теоремы Птолемея (исследование которого упрощается за счет наличия равенства сторон AC и BC).

---

[1] См., например: *Жак Адамар.* Элементарная геометрия. Часть первая. Планиметрия. Издание третье. – М.: ОГИЗ, 1948, с. 217–219.

[2] Теорема названа в честь Клавдия Птолемея (ок. 100 – ок. 170 г.) – древнегреческого астронома и математика.

В завершение приведем в виде упражнений еще несколько примеров применения теоремы Птолемея.

Упражнения

6. Выведите из теоремы Птолемея теорему Пифагора.

Указание. Рассмотрите случай прямоугольника.

7. Выведите из теоремы Птолемея формулу синуса суммы двух углов.

Указание. Рассмотрите случай четырехугольника $ABCD$, в котором диагональ AC является диаметром описанной окружности, $\angle BAC = x$, $\angle DAC = y$.

8. Докажите, что из всех треугольников ABC с данной стороной AC и данным углом при вершине B наибольший периметр имеет равнобедренный.

Указание. Продлите биссектрису угла B до пересечения с описанной окружностью треугольника в точке D и рассмотрите четырехугольник $ABCD$.

9. Найдите отношение диагонали правильного пятиугольника к его стороне.

10. Пусть точка P лежит на дуге BC окружности, описанной около правильного пятиугольника $ABCDE$. Докажите, что $PA + PD = PB + PC + PE$.

Указание. Примените теорему Птолемея к четырехугольникам $PBAE$, $PCDE$ и $PAED$.

11. Докажите, что

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\sin\frac{3\pi}{7}}.$$

Указание. Рассмотрите четырехугольник $A_1A_3A_4A_5$, где $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ – правильный семиугольник.

Виталий Дмитриевич Арнольд
(14.10.1968–04.01.2017)

Четвертого января 2017 года в автокатастрофе трагически погиб Виталий Дмитриевич Арнольд – выдающийся педагог, популяризатор науки, надежный друг журнала «Квант».

Организатор летних школ «Современная математика» и многочисленных олимпиад, один из создателей Московского Центра непрерывного математического образования и многих важных информационных ресурсов, Виталий Дмитриевич стал ключевой фигурой в образовании. Потрясающая работоспособность, энергия и харизма, необыкновенная эрудиция, острый ум и внимание абсолютно ко всему происходящему, открытость и тонкое чувство юмора – уникальный набор качеств Виталия Дмитриевича был всегда направлен только на созидание и борьбу с невежеством.

Это был настоящий Рыцарь математического просвещения.