Свойства ортоцентра в задачах на готовых чертежах

Н.А. Ленская , Д.В. Прокопенко, ГБОУ Физматшкола №2007, Москва

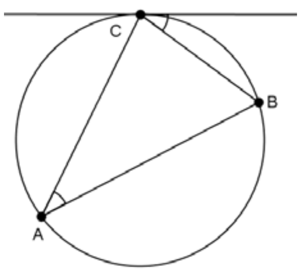
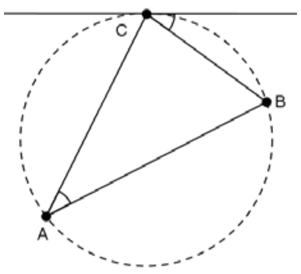
Вступление

Статья предназначена для учителей и представляет собой готовый материал для классной работы или проведения кружков. Несмотря на то, что свойства ортоцентра хорошо известны и описаны в статьях (см. список литературы), мы считаем полезным собрать разрозненные факты в одну таблицу.

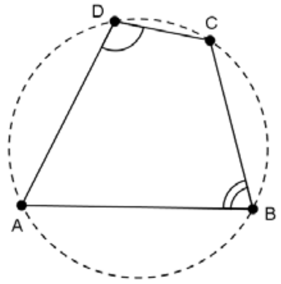
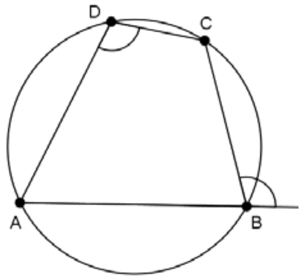
В статье приведен подробный разбор двух занятий кружка по геометрии, который можно давать в 8-9 классе. На первом мы докажем основные свойства ортоцентра. Во второй части приведем задачи на готовых чертежах, что позволяет увеличить количество решенных задач этой части. Задачи подобраны достаточно простые, с коротким решением. которые помогают закрепить материал из первой части, многократно проговорить свойства ортоцентра. В конце списка задач есть две задачи повышенной, но вполне доступной сложности: с региональной олимпиады по математике и доказано существование прямой Эйлера. Желательно, чтобы все приведенные задачи были решены без использования подобия.

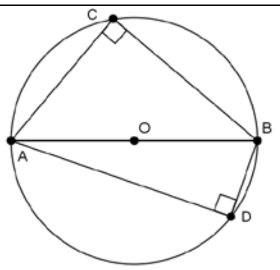
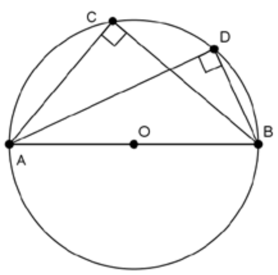
Повторение некоторых фактов и методов планиметрии

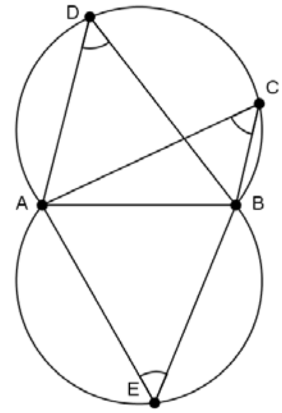
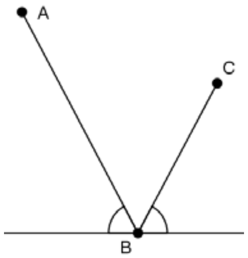
В задачах на ортоцентр треугольника часто используются свойства и признаки вписанных четырехугольников, вписанные углы, прямой угол опирается на диаметр и т.д. Поэтому перед занятиями полезно провести повторение. Особенно это важно в 8 классе, когда опыта решения задач на эту тему еще немного. Предварительно полезно провести отдельный кружок на эту тему.

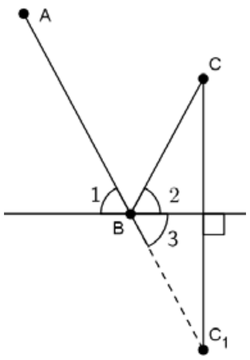
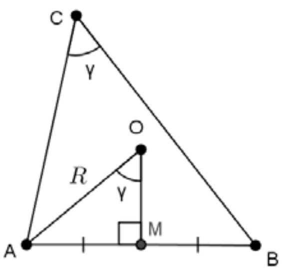
1		**Свойство и признак касательной** **Свойство**: угол между касательной и хордой равен вписанному углу, опирающемуся на дугу, заключенную между ними. **Признак**: прямая, проходящая через вершину треугольника и образующая со стороной, исходящей из этой вершины, угол, равный углу треугольника, лежащему против этой стороны, является касательной к описанной окружности треугольника.

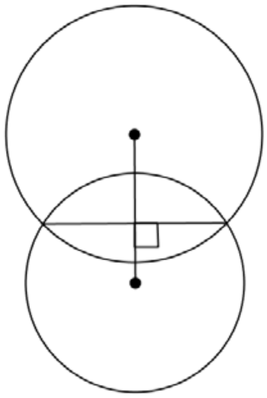
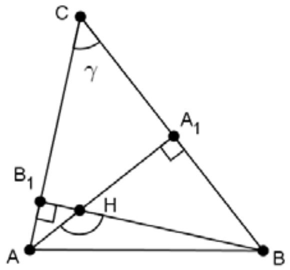
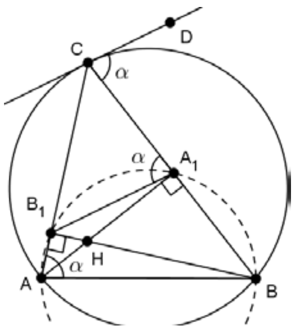
При решении задач часто приходится использовать признаки того, что четыре точки лежат на одной окружности. Перечислим те, которые нам пригодятся при изучении этой темы и некоторые полезные вспомогательные факты.

2	  	**Признаки и свойства вписанного четырехугольника** Признак: Если сумма противоположных углов четырехугольника равна 180°, то четырехугольник вписан в окружность. Верно и обратное. Свойство: внешний угол вписанного четырехугольника равен противоположному внутреннему углу. Верно и обратное.

3	  	**Геометрическое место точек** а) Геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под прямым углом, есть окружность, построенная на данном отрезке как на диаметре, без концов отрезка.

<table>
<tr>
<td>4</td>
<td>
</td>
<td>б) Геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом, есть две симметричные дуги (см. рисунок), без концов отрезка.</td>
</tr>
<tr>
<td>5</td>
<td>


</td>
<td> Метод выпрямления траектории
Довольно часто в задачах встречается следующая конструкция (см. рис.). Ее можно сформулировать в физических терминах: луч света отражается от зеркала по закону угол падения равен углу отражения.
В большинстве случаев решить задачу с такой конструкцией можно, сделав простое дополнительное построение: продолжим луч AB за точку B. Другими словами, мы «выпрямляем» траекторию движения. Этот метод так и называют «метод выпрямления траектории». Получаем, что $\angle 1 = \angle 3 = \angle 2$. Следовательно, на чертеже возникает биссектриса, а вместе с ней и симметрия, свойства которых можно подключить к решению задач. </td>
</tr>
<tr>
<td>6</td>
<td>
</td>
<td> Радиус – как важное дополнительное построение.
С этой конструкцией связано еще одно дополнительное построение. Опустим перпендикуляр на хорду AB из центра O окружности. Получим прямоугольный треугольник, в котором $\angle MOA$ равен вписанному $\angle BAC$. Мы воспользуемся этим дополнительным построением при доказательстве свойств ортоцентра.
Вписанный угол равен половине центрального.
$\angle AOM = \gamma$ </td>
</tr>
</table>

7		**Линия центров двух пересекающихся окружностей** **Линией центров** двух окружностей называется прямая, походящая через их центры. Свойство: линия центров двух пересекающихся окружностей является серединным перпендикуляром к их общей хорде.
8	 $\angle AHB = 180° - \gamma$ 	**Важная конструкция, связанная с двумя высотами.** Обозначим углы треугольника ABC $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$. Конструкция, о которой идет речь, возникает в задачах довольно часто, поэтому необходимо, чтобы учащиеся, глядя на нее (см. рис.), умели отвечать на вопросы: 1. Назовите четверки точек, лежащие на одной окружности. Укажите центры этих окружностей, общую хорду. 2. Чему равен а) угол между высотами AHB? б) угол между высотой AA_1 и стороной AB? в) угол между высотой BB_1 и стороной BC? а) Стоит запомнить очень полезную формулу **Формула «угол между высотами»:** $\angle AHB = 180° - \gamma$. 3. Проведем через точку C касательную к описанной окружности треугольника ABC. Что можно сказать о взаимном расположении этой касательной и прямой, содержащей сторону A_1B_1 ортотреугольника. Ответ: Они параллельны. Решение: по свойству касательной $\angle DCB = \angle CAB = \alpha$. По свойству внешнего угла вписанного четырехугольника углы $\angle CA_1B_1 = \angle B_1AB = \alpha$. Следовательно, прямые CD и A_1B_1 параллельны. 4. Верно ли, что если через точку C провести прямую, параллельную стороне A_1B_1, то она окажется касательной к описанной окружности треугольника ABC . Ответ: верно. Указание: примените признак касательной.

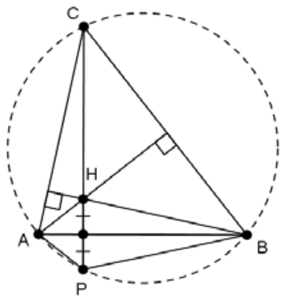
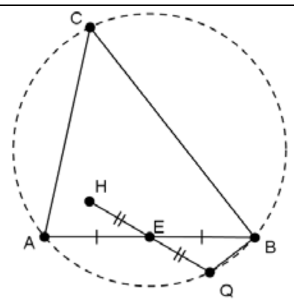
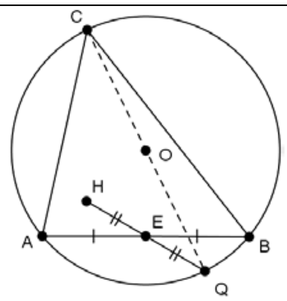
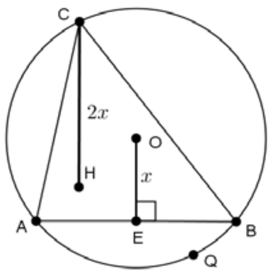
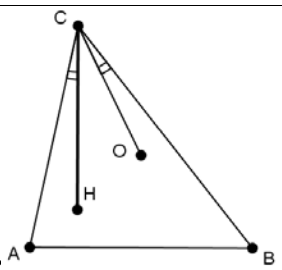
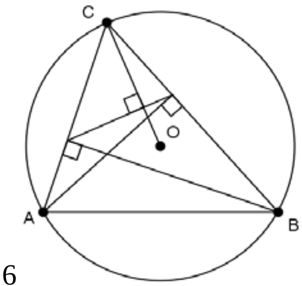
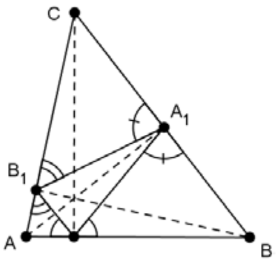
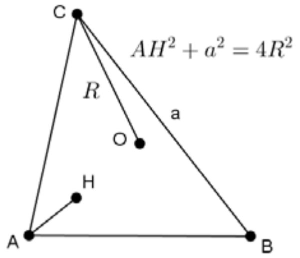
После повторения школьникам сначала раздается таблица с чертежами, на которых отображены основные свойства ортоцентра и ортотреугольника (см. таблицу 1). Затем начинается коллективная работа с детьми. Их задача: глядя на чертеж, сформулировать соответствующее свойство.

Основные свойства ортоцентра и ортотреугольника

Ортоцентром треугольника называется точка пересечения прямых, содержащих высоты треугольника. Основания являются вершинами высот треугольника **ортотреугольника**.

На всех чертежах будем использовать обозначения: O – центр описанной окружности треугольника ABC, H – ортоцентр.

Таблица 1

 1	 2	 3
 4	 5	 6
 7	 8	Нарисуй свою картинку

Формулировки

После обсуждения вариантов формулировок и корректировки их учителем, наиболее удачные записываются. Приведем их:

Свойство 1. Точка, симметричная ортоцентру треугольника относительно его стороны, лежит на описанной около этого треугольника окружности.

Свойства 2 и 3. Точка, симметричная ортоцентру треугольника относительно середины его стороны, лежит на окружности, описанной около треугольника, и диаметрально противоположна вершине треугольника, противолежащей данной стороне.

Свойство 4. Расстояние от вершины треугольника до его ортоцентра в два раза больше расстояния от центра описанной окружности до противолежащей стороны.

Свойство 5. Угол между радиусом и стороной равен углу между высотой и стороной (все они выходят из одной вершины).

Свойство 6. Радиусы описанной окружности, проведенные к вершинам треугольника, перпендикулярны соответствующим сторонам ортотреугольника.

Свойство 7. а) Стороны ортотреугольника образуют равные углы с соответствующими сторонами данного треугольника.

б) Ортоцентр остроугольного треугольника является точкой пересечения биссектрис ортотреугольника (центром его вписанной окружности).

Свойство 7. Сумма квадратов расстояния от вершины треугольника до его ортоцентра и длины стороны, противолежащей этой вершине, равна квадрату диаметра описанной окружности.

Отметим, что раздавать детям готовые формулировки мы не рекомендуем, поскольку работа по самостоятельному формулированию и записи свойств положительно влияет на запоминание.

Далее занятие посвящено самостоятельному доказательству свойств. Заметим, что основные этапы доказательств были проработаны на этапе повторения, что существенно повышает процент учащихся, способных самостоятельно провести доказательство, и как следствие, запомнить свойство.

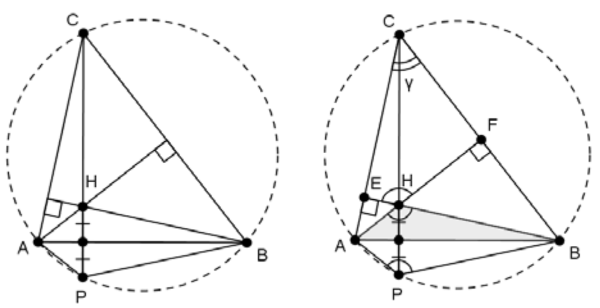
Таким образом, мы «убиваем сразу двух зайцев»: и доказываем свойства ортоцентра, и еще раз прокручиваем важные факты планиметрии.

Мы приведем некоторые соображения по поводу доказательств именно с этой целью. Если школьник приводит правильное, но не рациональное доказательство или использует совершенно другие идеи, то мы засчитываем решение, задаем наводящие вопросы и подводим его к тому способу, который нам нужен.

Доказательства свойств ортоцентра

Свойства 1 и 2 – отличный повод потренироваться в применении определения равных фигур в общем виде (через движение), формулы угла между высотами, признака вписанного четырехугольника.

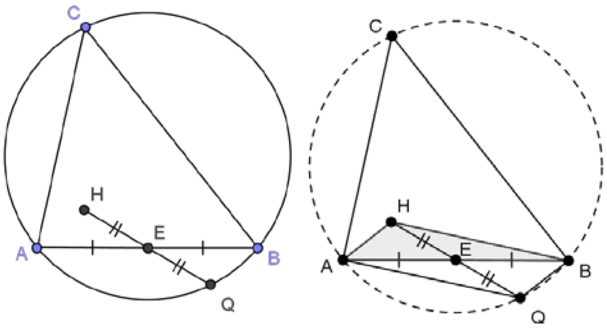
Свойство 1.



Точка P симметрична точке H. Треугольники AHB и APB симметричны, следовательно, они равны, значит, $\angle APB = \angle AHB = 180° - \angle ACB$ (как угол между высотами). В четырехугольнике $ACBP$ $\angle C + \angle P = 180°$. Следовательно, он – вписанный, тогда точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC.

На наш взгляд здесь полезно обратить внимание на треугольник AHB.

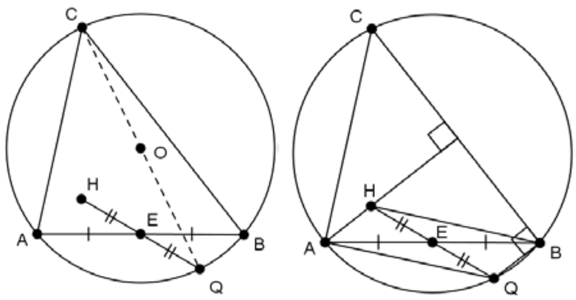
Свойство 2.



Рассмотрим снова треугольник AHB.

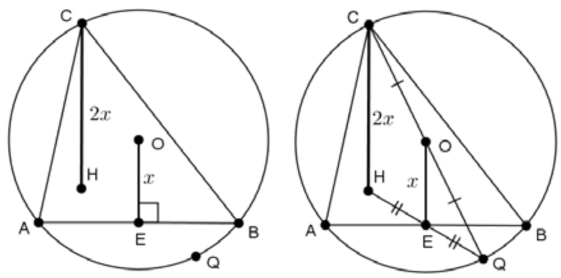
Доказательство почти буквально повторяет доказательство свойства 1. Полезно заметить, что $AHBQ$ – параллелограмм. Это нам пригодится при доказательстве свойств 3 и 8 и в решении задач.

Свойство 3.



Из п. 2 известно, что $AHBQ$ – параллелограмм. Значит, $BQ \parallel AH$ и $AH \perp BC$ (т.к. AH содержит высоту треугольника). Получили, что $\angle CBQ = 90°$. Следовательно, CQ – диаметр.

Свойство 4.



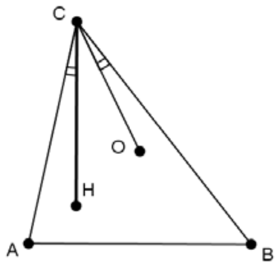
Совместим на одном чертеже свойства 2 и 3 (см. рис). CQ – диаметр, тогда OE – средняя линия треугольника CQH. Здесь же в качестве подготовки решения задачи о прямой Эйлера можно продолжить работать с чертежом, используя следующие вопросы:

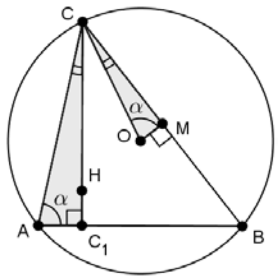
1. Чем являются для треугольника CQH а) отрезок CE; б) отрезок HO?

2. Чем является для треугольника CQH точка пересечения отрезков CE и HO?

Свойства 5 и 8 можно доказать с помощью одного построения. Из точки O опустим перпендикуляр OM на CB (см. Повторение, п.6 «Радиус – как важное дополнительное построение»).

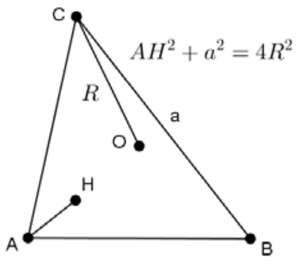
Свойство 5

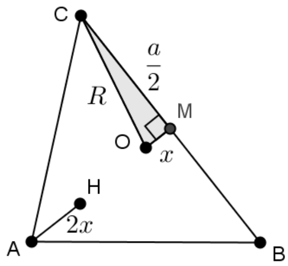




Равенство нужных углов следует из того, что $\angle COM = \angle CAB = \alpha$.

Свойство 8.



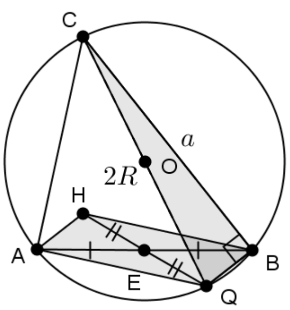


Из треугольника COM по теореме Пифагора $OC^2 = OM^2 + CM^2$. По свойству 4 $OM = \frac{1}{2}AH$.

Получим, что $R^2 = \frac{AH^2}{4} + \frac{a^2}{4}$, $4R^2 = AH^2 + a^2$.

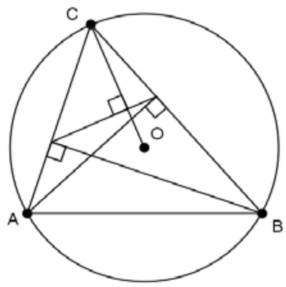
Обратим еще раз внимание, что в треугольнике *COM* собраны три элемента треугольника *ABC* – радиус описанной окружности, половина стороны и угол. Поэтому это дополнительное построение можно использовать для решения совсем других задач. С помощью треугольника *COM* можно доказать, например, теорему синусов для остроугольных треугольников, когда точка *O* лежит внутри треугольника *ABC*.

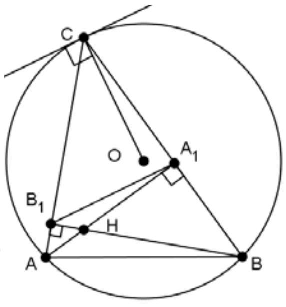
Способ 2: воспользуемся свойствами 2 и 3.



$AH = BQ$, см. доказательство свойства 2. Из треугольника CBQ по теореме Пифагора $4R^2 = BQ^2 + a^2 = AH^2 + a^2$.

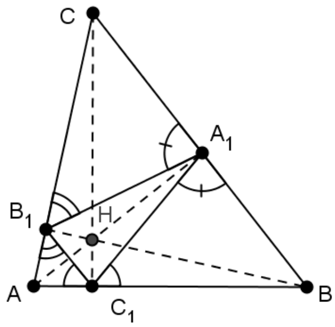
Свойство 6.

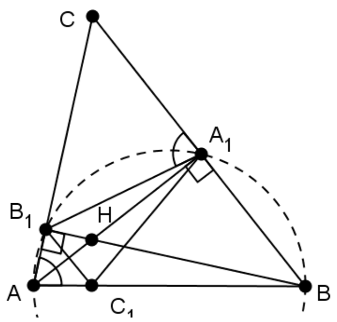


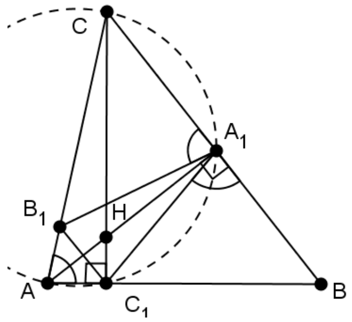


Вспомним «Повторение. Важная конструкция, связанная с двумя высотами». Мы доказали, что касательная в точке C параллельна стороне A_1B_1 ортотреугольника. Радиус перпендикулярен касательной и, следовательно, прямой A_1B_1.

Свойство 7.

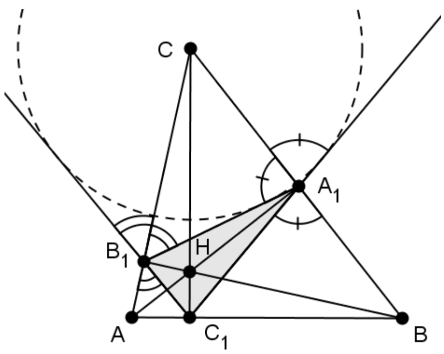






Доказательство очевидно из рисунков 2 и 3. См. «Повторение: внешний угол вписанного четырехугольника равен противоположному внутреннему углу».

Полезно обратить внимание, что в точках A_1 и B_1 можно воспользоваться методом выпрямления траектории (см. Повторение).



Продолжим лучи C_1B_1 и C_1A_1. Тогда B_1C и A_1C – биссектрисы внешних углов треугольника $A_1B_1C_1$. Точка C – центр вневписанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$.

Занятие 2. Задачи на готовых чертежах

На втором занятии кружка школьники получают в распечатанном виде задачи в виде таблицы (см. Таблицу 2) с указаниями. Задачи на построение надо решать с помощью циркуля и линейки. Достаточно объяснить **как** построить. Само построение можно не выполнять.

Есть ограничение в задачах на построение

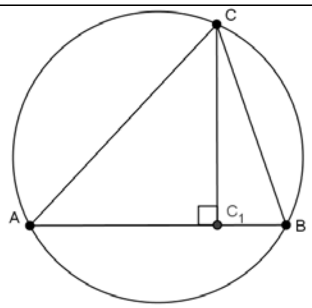
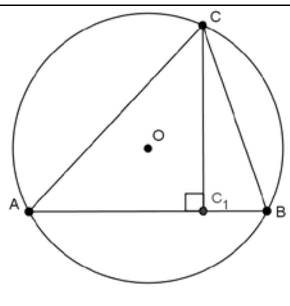
а) ортоцентра – не разрешается опускать перпендикуляр из **вершины** на прямую, содержащую противолежащую сторону;

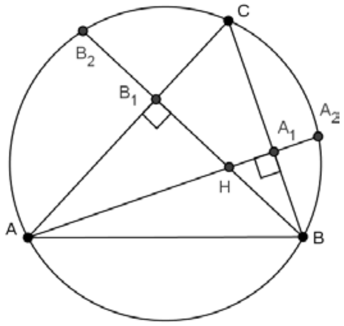
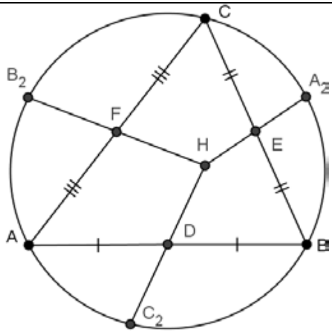
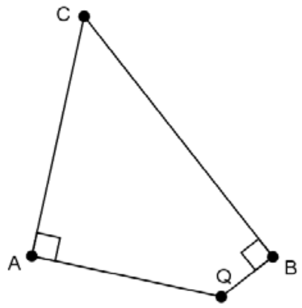
б) центра описанной окружности – нельзя строить серединный перпендикуляр к стороне треугольника.

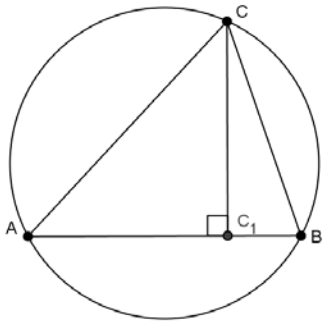
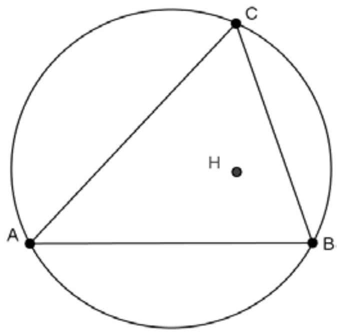
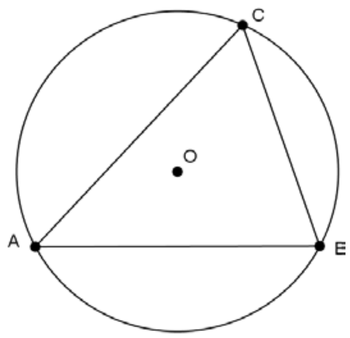
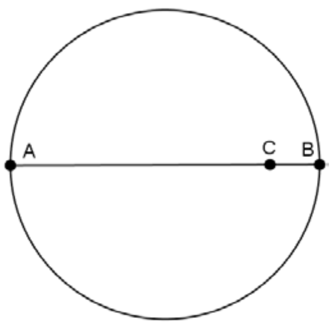
Будем использовать обозначения: O – центр описанной окружности, H – ортоцентр. Для решения этих задач у каждого ученика должна быть распечатанная табличка свойств ортоцентра.

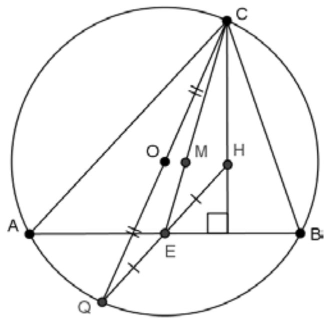
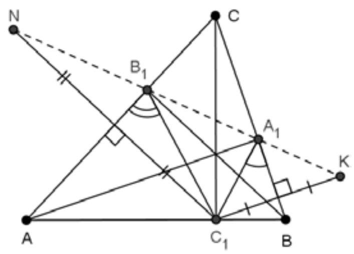
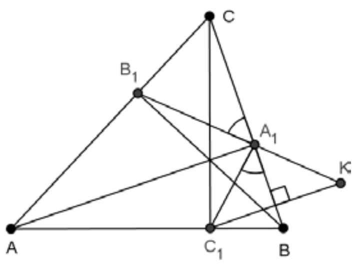
Указания к решению являются частью задания и приучают школьников искать знакомые конструкции, проводить дополнительные построения, помогают закрепить материал из первой части. На наш взгляд важно не только показывать на чертеже решение, но и многократно проговорить свойства ортоцентра.

Таблица 2

Опираясь на свойства ортоцентра и ортотреугольника, решите задачи:			
	Чертеж	**Формулировка**	**Указания к решению**
1		Постройте ортоцентр треугольника, не используя построение центра описанной окружности и перпендикуляра.	Свойство 1
2		Постройте ортоцентр треугольника (предложите три способа).	1 способ: свойства 2, 3. 2 способ: свойство 4. 3 способ: свойство 5.

3		$A_2B_2 = 10$. Найдите сторону ортотреугольника A_1B_1.	Свойство 1.
4		D, E и F – середины сторон. Найдите стороны треугольника $A_2B_2C_2$, если стороны треугольника ABC равны 5, 6, 7.	Свойство 2.
5		Постройте ортоцентр треугольника ABC, проведя всего две линии.	Свойство 2 и 3

6		Постройте центр описанной окружности.	Свойство 5.
7		Постройте центр описанной окружности (3 способа).	1 способ: свойство 5. 2 способ: свойства 2, 3. 3 способ: свойство 4.
8		1. Опустите из точки C перпендикуляр на AB. 2. Постройте ортотреугольник. 3. Через вершины треугольника проведите прямые, перпендикулярные сторонам ортотреугольника. 4. Постройте касательную к окружности в точке C.	Свойство 6.
9		Дана окружность с диаметром AB и точка C на диаметре. Постройте на окружности точки X и Y, симметричные относительно AB, для которых прямые AX и YC были бы перпендикулярны друг другу.	

10		M – точка пересечения медиан треугольника ABC. 1. Докажите, что точки O, M и H лежат на одной прямой. Эта прямая называется прямой Эйлера. 2. Докажите, что $OM : MH = 1 : 2$.	Чем является точка M в треугольнике CQH ?
11		В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Докажите, что точки N и K лежат на прямой A_1B_1.	Метод «выпрямления траектории». Свойство 7.
12		В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Прямая, перпендикулярная стороне BC и проходящая через точку C_1, пересекает прямую A_1B_1 в точке K. Докажите, что угол CKB – прямой. *Региональный этап Всероссийской олимпиады, 2008-2009, 9класс, №3.*	Смотри!

Заключение

К сожалению, объем статьи не позволяет привести задачи олимпиадного уровня, которые можно достаточно просто решить с помощью изученных свойств ортоцентра и ортотреугольника. В списке литературы указаны источники, изучение которых будет полезно и, одновременно, интересно.

Список литературы

1. Егоров А., Ортоцентрический треугольник, Квант, №4, 2001.
2. Филипповский Г.Б., О двух параллелограммах в треугольнике, Квант, №4, 2008.
3. Филипповский Г.Б., Лемма о “дважды биссектрисе”, Математика в школе, 2008, №4.

4. Филипповский Г.Б., "О двух точках, симметричных ортоцентру треугольника", Математика в школе, 2009, №3.

5. geometry.ru/articles.php, статьи на сайте, посвященном геометрии.