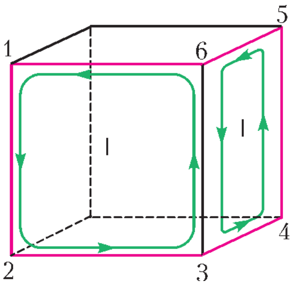

Рис. 2

контура. Контур 12361 создает магнитный поток $\Phi_1 = L_1 I$ через самого себя и отрицательный поток $\Phi_{12} = L_{12} I$ через соседний контур 65436. Точно так же ведет себя контур 65436 – создает магнитный поток через самого себя и через соседний контур 12361. Тогда суммарный поток через весь контур определяется двумя потоками, пронизывающими самих себя, и двумя другими потоками, пронизывающими соседний контур:

$$\Phi_2 = \left(2L_1 - 2L_{12}\right) I = L_2 I ,$$

откуда

$$L_{12} = L_1 - \frac{L_2}{2} .$$

Теперь рассмотрим третий виток (рис.3). Контур 12761 создает поток $\Phi_1 = L_1 I$ через самого себя и отрицательный поток $\Phi_{12} = L_{12} I$ через соседние контуры 18561 и 23472. Аналогично ведут себя контуры 18561 и 23472, причем потоки от этих контуров, влияющие друг на друга, равны и противоположны по знаку. Тогда суммарный поток через весь виток определяется тремя потоками, пронизывающими самих себя, и четырьмя другими потоками, пронизывающими соседние контуры:

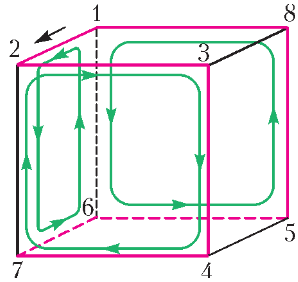

Рис. 3

$$\Phi_3 = \left(3L_1 - 4L_{12}\right) I = L_3 I ,$$

откуда

$$L_3 = 3L_1 - 4L_{12} = 2L_2 - L_1 .$$

Г.Кузнецов

Приключения одной задачи

А.ЗАСЛАВСКИЙ

У меня было сорок фамилий,
У меня было семь паспортов.

В.Высоцкий

В 2017 году на финале Олимпиады имени И.Ф.Шарыгина была предложена следующая задача (задача М2479 «Задачника «Кванта»).

Задача 1 (С.Берлов, А.Полянский). *Точка I – центр вписанной окружности треугольника ABC, точка M – середина стороны AC, а точка W – середина дуги AB описанной окружности, не содержащей C (рис. 1). Оказалось, что $\angle AIM = 90°$. В каком отношении I делит отрезок CW?*

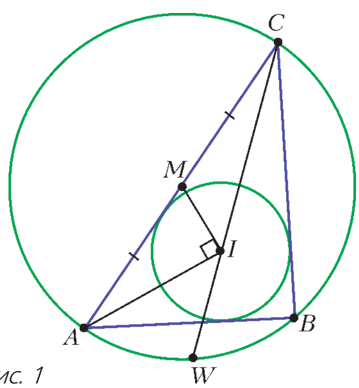

Рис. 1

Ответ. 2:1.

Решение. Пусть I_c – центр вневписанной окружности, касающейся стороны AB (рис.2). Так как $AI_c \perp AI$, получаем, что $IM \parallel AI_c$, т.е. IM – средняя линия тре-

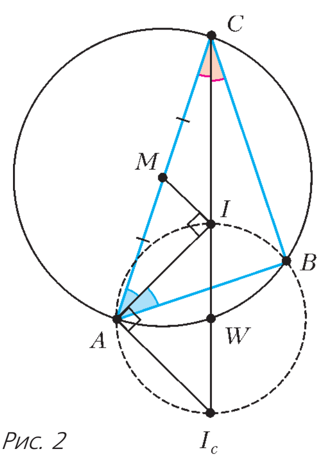

Рис. 2

угольника ACI_c. Как известно, W равноудалена от A, B, I, I_c (теорема о трезубце), в частности, W – середина II_c, следовательно, $CI = II_c = 2IW$.

Упражнение 1. Докажите обратное утверждение: если $CI = 2IW$ (или $CI = II_c$), то $\angle AIM = 90°$.

Надо сказать, что такая формулировка задачи на олимпиаде появилась в последний момент. До этого в проекте варианта фигурировала немного другая задача.

Задача 2 (С.Берлов). *Периметр треугольника ABC равен 1. Точка I – центр вписанной окружности, точка M – середина стороны AC. Оказалось, что* $\angle AIM = 90°$. *Найдите длину стороны AB.*

Ответ. $1/4$.

Первое решение. Одно из решений задачи 2 нетрудно получить из приведенного выше решения задачи 1. Действительно, так как I – середина CI_c, радиус r_c вневписанной окружности вдвое больше радиуса r вписанной. Отсюда и из формул площади треугольника $S = pr = (p-c)r_c$ сразу получаем ответ: $c = 1/4$.

Но у задачи 2 есть еще несколько решений. Приведем два из них.

Второе решение. Пусть N – середина BC (рис.3). Так как $MN \parallel AB$ и $\angle AIM = 90°$, то MI – биссектриса угла AMN. Поэтому прямая MN касается вписанной окружности треугольника. Значит, трапеция $AMNB$ описана вокруг этой окружности, т.е. $AB + MN = AM + BN$,

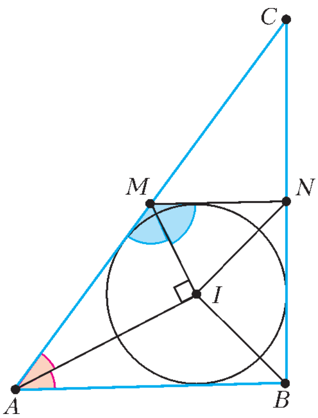

Рис. 3

откуда, поскольку $MN = AB/2$, получаем $AB = (AC + BC)/3$.

Упражнение 2. Докажите, что из равенства $AB = (AC + BC)/3$ следует, что $\angle AIM = 90°$.

Третье решение. Пусть T – точка касания стороны AC с соответствующей вневписанной окружностью (рис.4). Известно, что $BT \parallel IM$ (это можно доказать, рассмотрев гомотетию, переводящую вписанную окружность во вневписанную). Следовательно, в треугольнике ABT прямая AI является биссектрисой и высотой, т.е. $AB = AT = p - c$, откуда легко следует $AB = 1/4$.

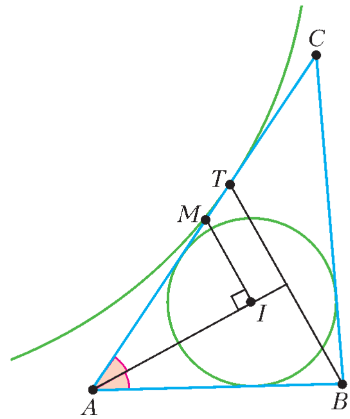

Рис. 4

Упражнение 3. Докажите непосредственно, что средняя линия, параллельная AB, касается вписанной окружности тогда и только тогда, когда $r_c = 2r$.

Указание. Примените гомотетию с центром в точке C.

Так почему же формулировка задачи была изменена прямо перед олимпиадой? Дело в том, что в 2010 году на Московской математической олимпиаде предлагалась следующая задача.

Задача 3 (А.Заславский). *В треугольнике ABC точка I – центр вписанной окружности, точки M, N – середины сторон AC, BC. Известно, что* $\angle AIM = 90°$. *Докажите, что* $\angle BIN = 90°$.

Легко видеть, что решение этой задачи практически совпадает со вторым из приведенных решений задачи 2.

Но и это еще не все! В 2014 году на Олимпиаде имени И.Ф.Шарыгина предлагалась такая задача.

Задача 4 (А.Полянский).} *Пусть I – центр вписанной окружности треугольника ABC, M, N – середины дуг ABC и BAC описанной окружности. Докажите, что точки M, I, N лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $AC + BC = 3AB$.*

Решение. Докажем, что если точки M, I, N лежат на одной прямой, то $AC + BC = 3AB$.

Первый способ. Обозначим через A_1, B_1 и C_1 середины дуг BC, CA и AB, не содержащих других вершин треугольника ABC (рис.5,*а*).

Так как A_1N и B_1M – диаметры, то A_1B_1 и MN равны и параллельны. Как известно, $A_1B_1 \perp CC_1$ и $CC_2 = C_2I$. Из симметрии относительно серединного перпендикуляра к CC_1 имеем $CC_2 = C_1I$, следовательно, $CI = 2IC_1$. Но из упражнения 1 и задачи 2 мы уже знаем, что последнее равенство равносильно требуемому.

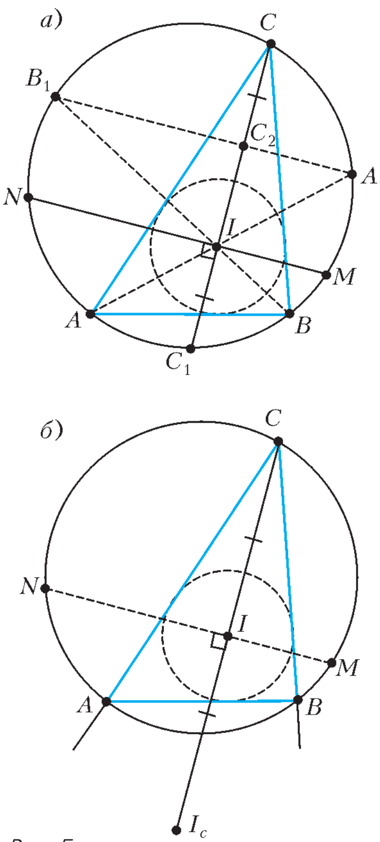

Рис. 5

Второй способ. Пусть I_c – центр вневписанной окружности, касающейся стороны AB (рис.5,*б*). Как известно, M и N являются центрами окружностей ACI_c и BCI_c (вариант теоремы о трезубце для середин дуг BAC и ABC). Следовательно, MN – серединный перпендикуляр к отрезку CI_c, т.е. I – середина CI_c. Мы снова получили условие, равносильное требуемому.

Упражнение 4. Проведите рассуждения в обратную сторону, доказав, что если $AC + BC = 3AB$, то точки M, I, N лежат на одной прямой.

Подведем итог. Мы убедились, что следующие свойства треугольника ABC равносильны:

- $AB = (AC + BC)/3$;
- $\angle AIM = 90°$, где M – середина AC;
- $\angle BIN = 90°$, где N – середина BC;
- средняя линия, параллельная AB, касается вписанной окружности;
- I – середина CI_c;
- $CI = 2IW$, где W – середина дуги AB;
- середины дуг ABC, BAC и точка I лежат на одной прямой.

После этого уже не кажется удивительным многократное появление на олимпиадах задач про такие треугольники. Возможно, читателям удастся обнаружить у них новые свойства или найти новый, не менее интересный класс треугольников.

P.S. Когда статья была уже написана, С.Берлов сообщил, что на одной из Санкт-Петербургских олимпиад предлагалась следующая задача.

Задача 5 (С.Иванов). *В треугольнике ABC I – центр вписанной окружности, M, N – середины сторон AC, BC. Известно, что $\angle AIM + \angle BIN = 180°$. Докажите, что $AC + BC = 3AB$.*

Мы оставляем задачу 5 читателю для самостоятельного решения и надеемся, что наш рассказ поможет ее решить.