Комбинации квадратов

Е.БАКАЕВ

Для решения задач из этой статьи достаточно знать программу 7 класса школьного курса геометрии: признаки равенства треугольников, сумму углов треугольника, а также что собой представляет квадрат. С этим «набором юного геометра» мы предлагаем пройти путь до некоторых непростых и, надеемся, красивых задач.

Эти задачи, как часто бывает в геометрии, можно решать по-разному. Например, многие коротко решаются с помощью векторов или комплексных координат. Но наша цель не показать наиболее короткие решения, а дать читателю (и решателю) увидеть связь в цепочке задач, общую для них геометрическую конструкцию.

Решения задач записаны кратко. Мы подразумеваем, что некоторые логические переходы неочевидны и требуют от читателя самостоятельного обдумывания.

Также предлагаем в этих задачах не обращать внимания на другие возможные случаи взаимного расположения объектов, а опираться на рисунок, который задает условие. Но внимательному читателю будет полезно самостоятельно поразмыслить, что собой представляют эти другие случаи и как следует формулировать доказательство, чтобы оно охватывало и их тоже.

Автор признателен В.Н.Дубровскому за предложение дополнить статью решениями с помощью поворота и за ценные указания по их написанию.

Задача 1. *На рисунке 1,а даны два квадрата с общей вершиной. Докажите, что пунктирные отрезки равны и перпендикулярны.*

Указание. Найдите два равных треугольника или воспользуйтесь поворотом.

Решение. Первый способ. На рисунке 1,*б* закрашены два равных треугольника. Они равны по первому признаку: есть две пары равных сторон, а углы между ними в треугольниках одинаковые, потому что они образуются добавлением прямого угла к одному и тому же углу. Значит, пунктирные отрезки равны как соответствующие элементы равных треугольников. Теперь докажем их перпендикулярность. Рассмотрим треугольники, закрашенные на рисунке 1,*в*. Докажем, что в них одинаковые наборы углов (иначе говоря, треугольники подобны). Два угла равны как вертикальные. Еще два угла равны как соответ-

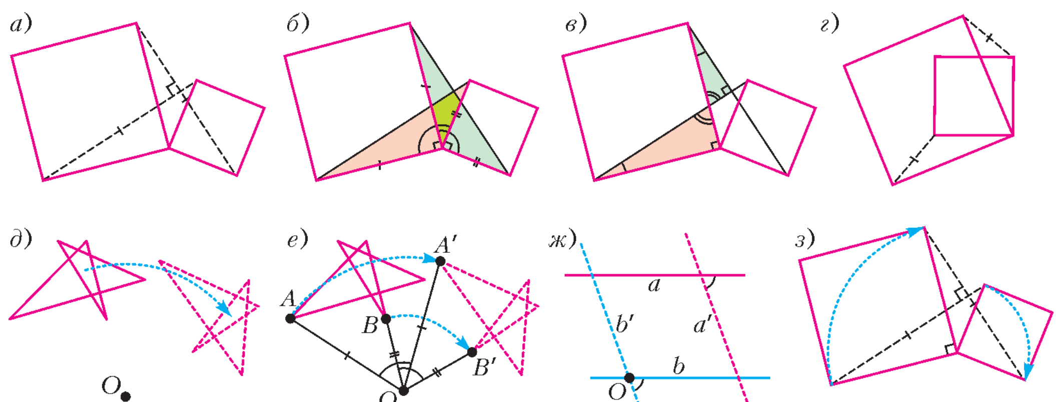

Рис. 1

ствующие элементы треугольников, равенство которых мы доказали выше. Сумма углов треугольника равна 180°, значит, и третьи углы треугольников равны. Так что угол между пунктирными отрезками прямой.

Упражнение 1. Докажите то же утверждение для квадратов, расположенных, как на рисунке 1,*г*.

Указание. Продлите пунктирные отрезки до пересечения. Далее – аналогично решению для рисунка 1,*а*.

Второй способ. Это решение использует поворот. Поясним, что это такое. Сделаем копию чертежа на прозрачной пленке и наложим ее на чертеж так, чтобы оригинал и копия совпадали. Воткнем в стол иголку, проколов чертеж и копию. Если теперь подвинуть пленку, то копия чертежа на ней повернется вокруг точки O, в которую воткнута иголка (рис.1,*д*).

Перечислим основные свойства поворота. Пусть поворот был совершен вокруг точки O, точка A перешла в точку A', точка B – в B'. Тогда:

1) Углы AOA' и BOB' равны, иными словами, все точки поворачиваются на один и тот же угол. Он называется *углом поворота* (рис.1,*е*).

2) Фигуры переходят в равные им фигуры. В частности, $OA = OA'$, $AB = A'B'$, $\Delta OAB = \Delta OA'B'$.

3) Угол между прямыми (точнее, лучами) AB и $A'B'$ равен углу поворота.

Упражнение 2. Докажите свойство 3.

Указание. Обозначим прямые AB и $A'B'$ как a и a' соответственно (рис.1,*ж*). Через точку O проведем прямую b параллельно прямой a. Пусть при повороте b переходит в b'. Тогда $a' \parallel b'$. Получаем два угла с параллельными сторонами.

Вооруженные свойствами поворота, вернемся к нашей задаче. Повернем конструкцию на 90° вокруг общей вершины квадратов (рис.1,*з*). Тогда в каждом квадрате одна вершина перейдет в другую (потому что соседние стороны квадрата равны и перпендикулярны). Соответственно, один пунктирный отрезок перейдет в другой. По свойству 2 эти отрезки равны, а по свойству 3 они перпендикулярны.

Подробнее о поворотах и других движениях плоскости можно прочитать, например, в статье В.Бугаенко «Движения плоскости и теорема Шаля» в «Кванте» №4 за 2009 год или в статье В.Фишмана «Решение задач с помощью геометрических преобразований» в «Кванте» №7 за 1975 год.

Задача 2. *Рассмотрим теперь комбинацию трех квадратов, изображенную на рисунке 2,а. Докажите, что центр синего квадрата является серединой отрезка, соединяющего вершины двух красных квадратов.*

Указание. Найдите три равных треугольника.

Решение. В предыдущей задаче рассматривались два квадрата с общей вершиной и возникали два равных треугольника с этой же общей вершиной. В нашей конструкции есть такие же пары квадратов, значит, есть и соответствующие им пары равных треугольников. Объединив две такие пары, получим, что три треугольника равны (рис.2,*б*). Задача свелась к такой: на противоположных сторонах квадрата построены равные треугольники (рис.2,*в*), требуется доказать, что их вершины лежат на одной прямой с центром квадрата.

Рассмотрим симметрию относительно центра квадрата. (Центральная симмет-

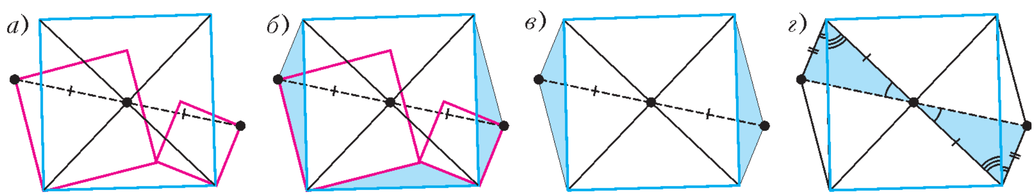

Рис. 2

рия – это поворот на 180°.) Квадрат симметричен самому себе, а треугольники – друг другу. Значит, вершины треугольников не только лежат на одной прямой с центром квадрата, но и равноудалены от него.

Можно доказать это, и не прибегая к симметрии. Закрашенные на рисунке 2,*г* треугольники равны по первому признаку: две стороны равны как стороны равных треугольников, еще две стороны равны, потому что это отрезки, соединяющие вершины квадрата с его центром, а углы равны, потому что они состоят из углов в 45° и углов равных треугольников. Из равенства треугольников следует равенство углов, а раз две их стороны образуют одну прямую, значит, эти углы вертикальны.

Задача 3. *На рисунке 3,а даны три квадрата. Докажите, что вершина зеленого квадрата является серединой отрезка, соединяющего вершины красных квадратов.*

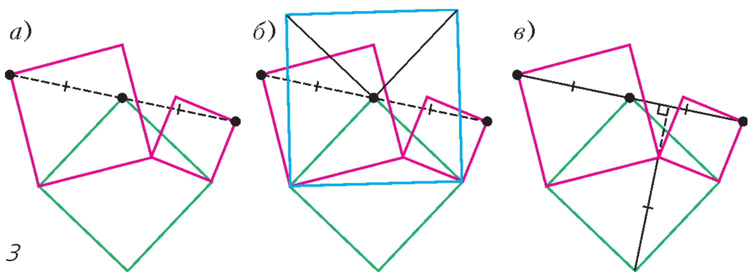

Рис. 3

Указание. Воспользуйтесь предыдущими задачами.

Решение. Первый способ. Добавим синий квадрат, как на рисунке 3,*б*. Получим конструкцию из задачи 2, в которой мы уже доказали требуемое.

Второй способ. Применим задачу 1 для зеленого и одного из красных квадратов. Получим, что два отрезка, отмеченных одной черточкой, равны и перпендикулярны (рис.3,*в*). Потом рассмотрим зеленый квадрат в паре с другим красным квадратом. Получим еще пару равных и перпендикулярных отрезков. Значит, рассматриваемые в условии задачи пунктирные отрезки равны и лежат на одной прямой.

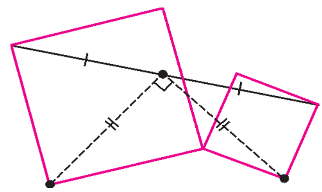
Рис. 4

Задача 4. *Даны два квадрата и отрезок, соединяющий их вершины (рис. 4). Докажите, что два пунктирных отрезка равны и перпендикулярны.*

Указание. Используйте предыдущую задачу.

Решение. Эта задача обратна предыдущей. В ней мы доказали, что вершина зеленого квадрата является серединой отрезка, соединяющего вершины красных квадратов. Но у отрезка только одна середина, значит, пунктирные отрезки равны и перпендикулярны, так как это стороны зеленого квадрата из предыдущей задачи.

Задача 5. *Три квадрата расположены, как на рисунке 5,а. Докажите, что два пунктирных отрезка равны и перпендикулярны.*

Указание. Воспользуйтесь предыдущими задачами.

Решение. Заметим, что комбинация квадратов здесь такая же, как в задаче 3. Значит, мы можем ее использовать и по-

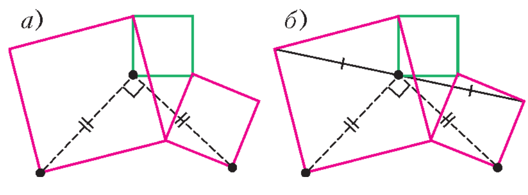

Рис. 5

лучить, что вершина зеленого квадрата лежит на середине отрезка, соединяющего две вершины красных квадратов (рис. 5,*б*). Теперь, зная, что это середина отрезка, воспользуемся задачей 4.

Задача 6. *Противоположные вершины синего квадрата расположены в центрах красных квадратов (рис.6,а). Докажите,*

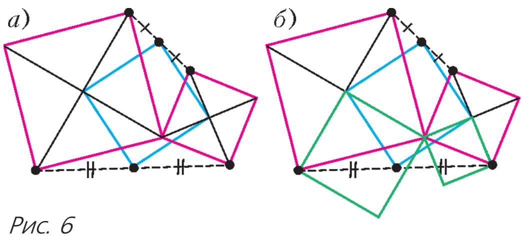

Рис. 6

что другие две вершины синего квадрата являются серединами отрезков, соединяющих вершины красных квадратов.

Указание. Придумайте, к каким двум квадратам следует применить утверждение задачи 3.

Решение. Рассмотрим два зеленых квадрата (рис.6,*б*). Применим к ним и к синему квадрату утверждение задачи 3. Для другой вершины синего квадрата утверждение доказывается аналогично, рассмотреть надо такие же зеленые квадраты, но построенные «с другой стороны».

Задача 7. *На сторонах четырехугольника во внешнюю сторону построены квадраты (рис.7,а). Докажите, что пунктирные отрезки, соединяющие центры противоположных квадратов, равны и перпендикулярны.*

Указание. Нужно больше квадратов!

Решение. Рассмотрим красные квадраты, противоположные вершины которых лежат в центрах синих квадратов (рис.7,*б*). По задаче 6 вершины каждого из них попадают в середину диагонали четырехугольника, таким образом, у красных квадратов есть общая вершина. Применив к ним задачу 1, получим, что пунктирные отрезки равны и перпендикулярны.

Задача 8. *На сторонах четырехугольника во внешнюю сторону построены квадраты (рис.8,а). Докажите, что середины диагоналей четырехугольника и середины отрезков, соединяющих центры противоположных квадратов, образуют квадрат.*

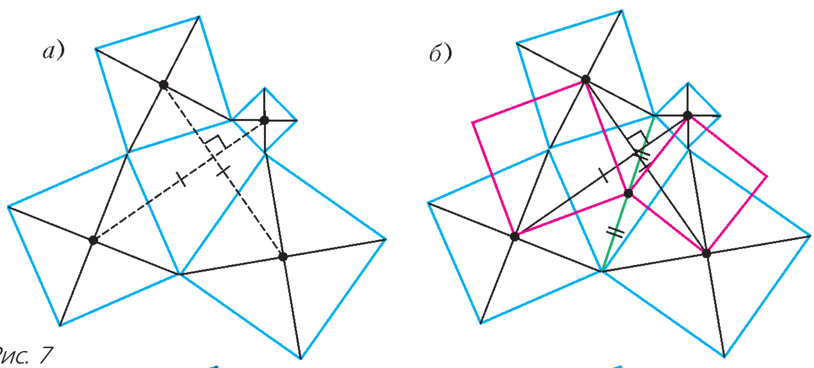

Рис. 7

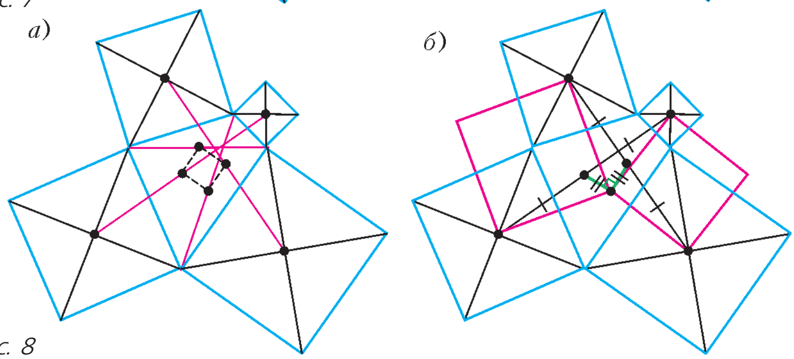

Рис. 8

Указание. Воспользуйтесь тем, что получено в решении предыдущей задачи.

Решение. Рассмотрим те же красные квадраты, что в доказательстве предыдущей задачи (рис.8,*б*).

В решении задачи 1 мы показали, что отрезки переходят друг в друга при повороте вокруг общей вершины красных квадратов на 90°. При этом повороте середина одного отрезка переходит в середину другого. Значит, отрезки, соединяющие эти середины с центром поворота, равны и перпендикулярны (по свойствам 2 и 3 поворота).

Таким образом, три точки, являющиеся концами зеленых отрезков, образуют равнобедренный прямоугольный треугольник. Рассмотрев другую пару красных квадратов (общая вершина которых лежит в середине другой диагонали исходного четырехугольника), аналогичным образом получим, что другие три точки тоже образуют равнобедренный прямоугольный треугольник, причем у них общая гипотенуза. Значит, четыре точки образуют квадрат.

Задачи для самостоятельного решения

Указания к этим задачам есть в конце номера. Условия задач задаются рисунками 9–16. Для каждой комбинации квадратов надо либо доказать, что пунктирные отрезки перпендикулярны, либо доказать, что три точки лежат на одной (пунктирной) прямой.

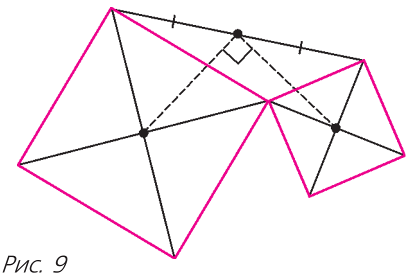

Рис. 9

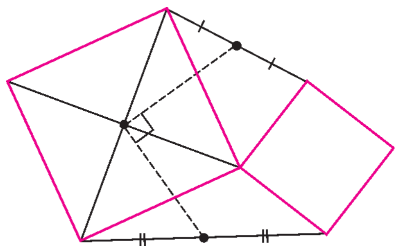

Рис. 10

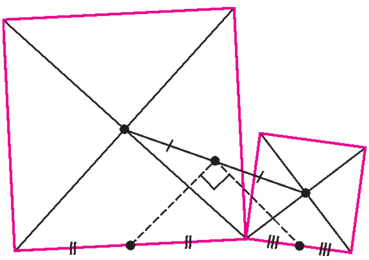

Рис. 11

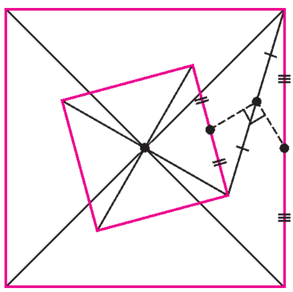

Рис. 12

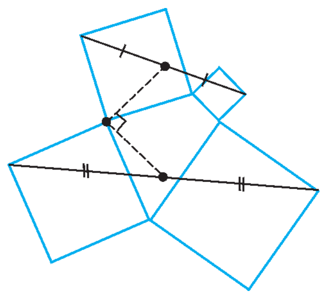

Рис. 13

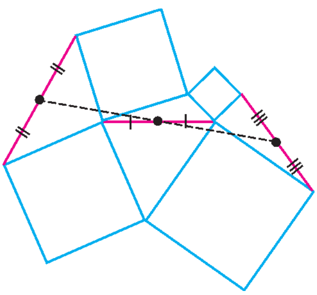

Рис. 14

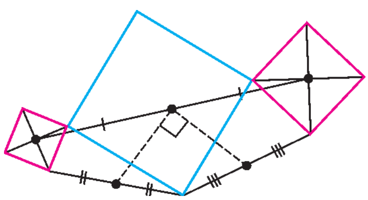

Рис. 15

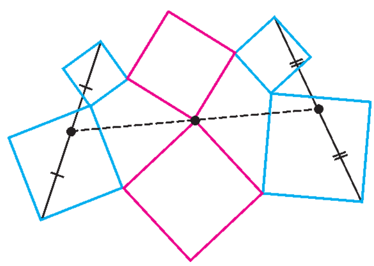

Рис. 16