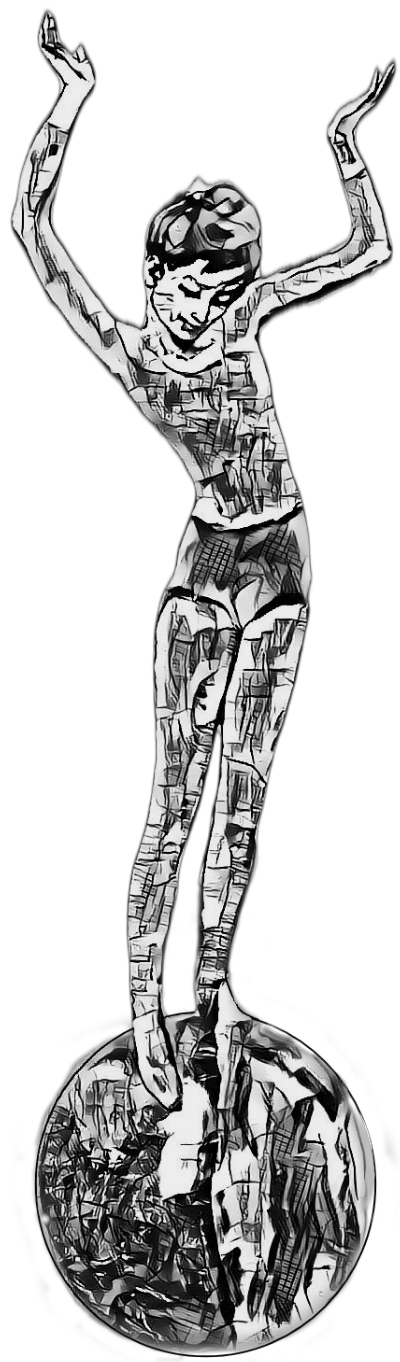
Е.И.Галахова

Девочка на шаре



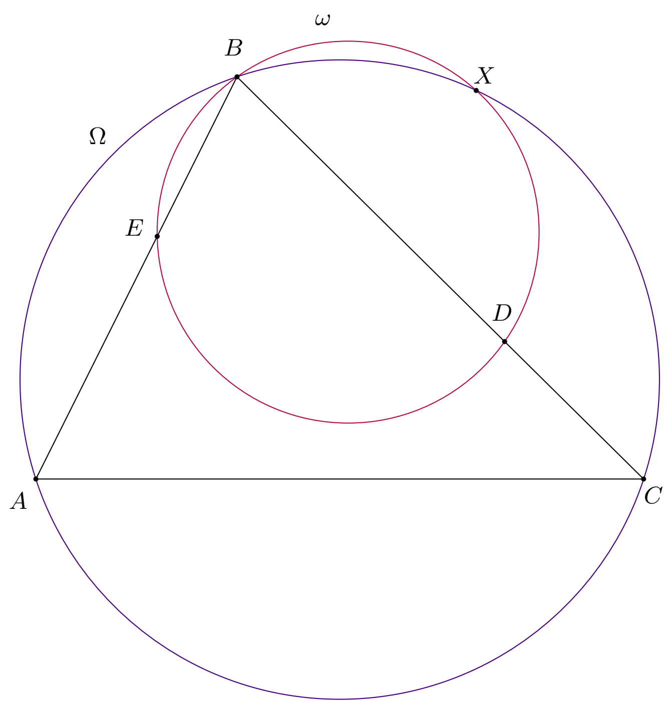
Москва
2022

Оглавление

Введение

Основная идея

Пусть на описанной окружности треугольника ABC взята точка X. Окружность ω, проходящая через точки B и X пересекает стороны BC и AB (или их продолжения) в точках D и E соответственно. Тогда, в зависимости от условий, накладываемых на точку X или окружность ω, можно определить конструкции, значительно упрощающие поиск решения соответствующих задач.



Обозначения

$\triangle ABC$ – треугольник ABC;
H – ортоцентр (точка пересечения высот) $\triangle ABC$;
I – инцентр (точка пересечения биссектрис) $\triangle ABC$;
O – центр описанной окружности $\triangle ABC$;
U – пересечение AD и CE;
I_A, I_B, I_C – центры вневписанных окружностей, лежащих против вершин A, B, C соответственно;
Ω – описанная окружность $\triangle ABC$;
ω – окружность, проходящая через точки B и X и пересекающая стороны AB и BC (или их продолжения) в точках D и E соответственно.

В тексте используются сокращения: радикальная ось – радось, серединный перпендикуляр – серпер.

Содержание

Статья состоит из 4 основных частей. Каждая часть посвящена описанию и доказательству свойств конструкций, связанных с точками I, H, O, U соответственно и задач, в которых знание таких конструкций бывает кстати.

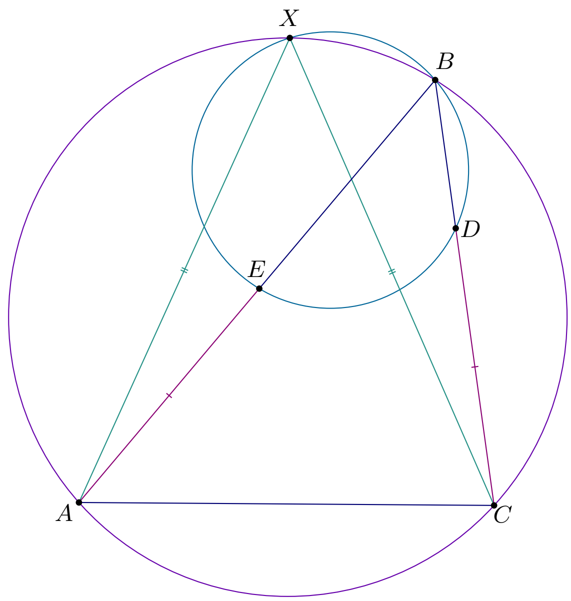
В приложении 1 даны подсказки к задаче 1.2. Приложение 2 – подборка задач по теме статьи. Приложение 3 – листок, собранный из рассмотренных задач.

Свойства и теоремы в статье выделены так, а замечания – так (цвет рамок меняется в соответствии с тем, в какой части они находятся (I, H, O)).

Часть I. Конструкции, связанные с I

1. Лемма о воробьях

Первый воробей. X – середина дуги AC или $ABC \Leftrightarrow AE = CD$.

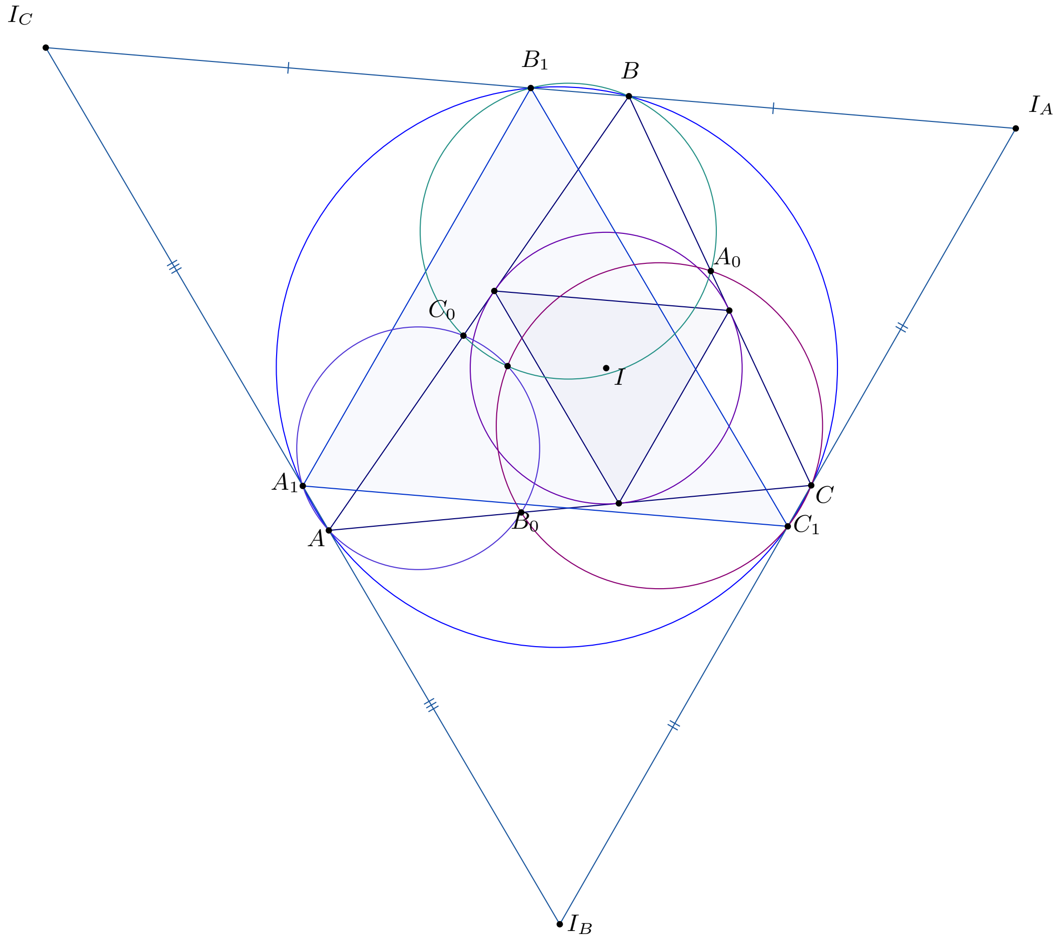


Доказательство: $\angle XEB = \angle XDB \Rightarrow \angle XAE + \angle AXE = \angle XCD + \angle CXD$, $\angle XAE = \angle XCD$, тогда $\angle AXE = \angle CXD$. $AX = CX$, значит $\triangle XAE = \triangle XCD$ по стороне и двум прилежащим к ней углам и $AE = CD$. Доказательство в обратную сторону аналогично. □

Замечание $I1$**.** В общем случае, если X – любая точка Ω, верно, что $\frac{AE}{CD} = \frac{AX}{XC}$.

Задача 1.1 (ВсОШ ЗЭ 2005, 11.3)

Пусть A_0, B_0 и C_0 – точки касания вневписанных окружностей с соответствующими сторонами треугольника ABC. Описанные окружности треугольников A_0B_0C, AB_0C_0 и A_0BC_0 пересекают второй раз описанную окружность Ω треугольника ABC в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику, образованному точками касания вписанной окружности $\triangle ABC$.

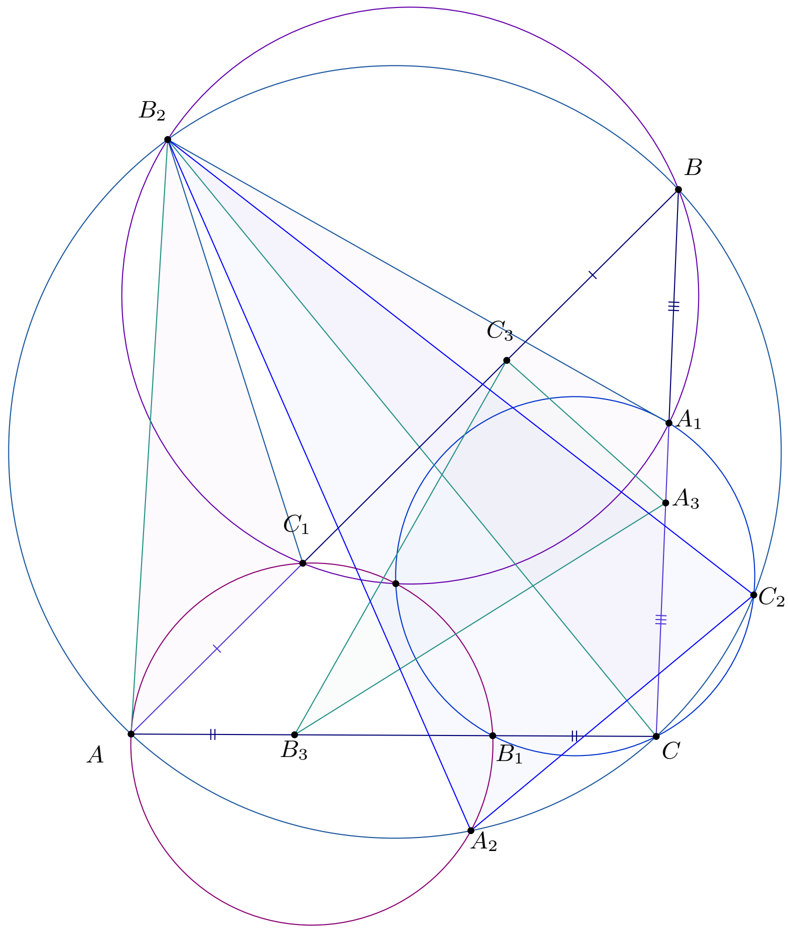


Решение: пусть $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ и полупериметр $\triangle ABC$ равен p. Тогда $AC_0 = p - b = CA_0$ и по лемме о первом воробье окружность, описанная около $\triangle A_0BC_0$ пересекает Ω в середине дуги ABC. Значит BB_1 – биссектриса внешнего угла B и B_1 – середина отрезка I_AI_C по внешней лемме о трезубце. Аналогично, точки A_1 и C_1 – середины I_BI_C и I_AI_B соответственно. Значит треугольник $A_1B_1C_1$ – серединный для $\triangle I_AI_BI_C$ и его стороны параллельны биссектрисам внешних углов $\triangle ABC$. Но стороны треугольника, образованному точками касания вписанной окружности $\triangle ABC$ также параллельны биссектрисам внешних углов $\triangle ABC \Rightarrow$ такие треугольники подобны.

Замечание *I*2**.** Эта задача обобщается на любые 3 точки на сторонах $\triangle ABC$. Главным условием на треугольник, образованный точками касания вписанной окружности является такое свойство: точки касания вписанной и вневписанной окружностей со стороной симметричны относительно середины стороны. За счет этого свойства можно сформулировать следующую задачу. Однако в ее решении первый воробей не участвует.

Задача 1.2 (IMO Shortlist 2006)

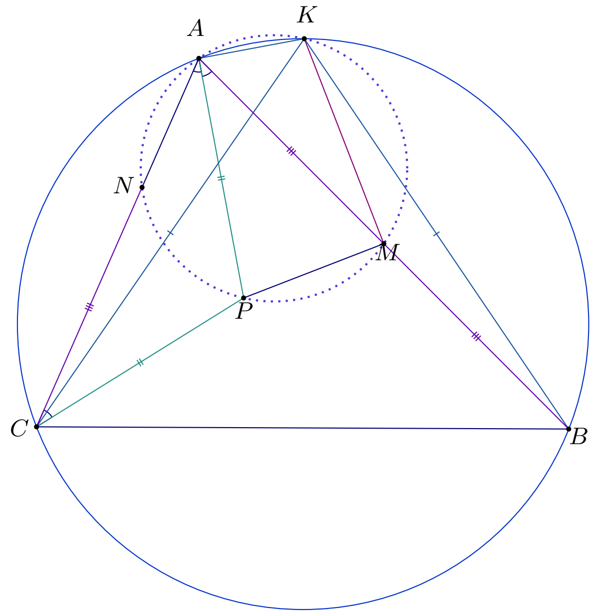
Точки A_1, B_1, C_1 лежат на сторонах BC, CA и AB $\triangle ABC$ соответственно. Описанные окружности треугольников AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C повторно пересекают описанную окружность $\triangle ABC$ в точках A_2, B_2, C_2 соответственно. Точки A_3, B_3, C_3 симметричны A_1, B_1, C_1 относительно середин соответствующих сторон. Докажите, что $\triangle A_2B_2C_2 \sim \triangle A_3B_3C_3$.



В приложении 1 даны подсказки по этапам решения. Решение задачи и некоторые интересные свойства этой конструкции можно почитать в статье [1].

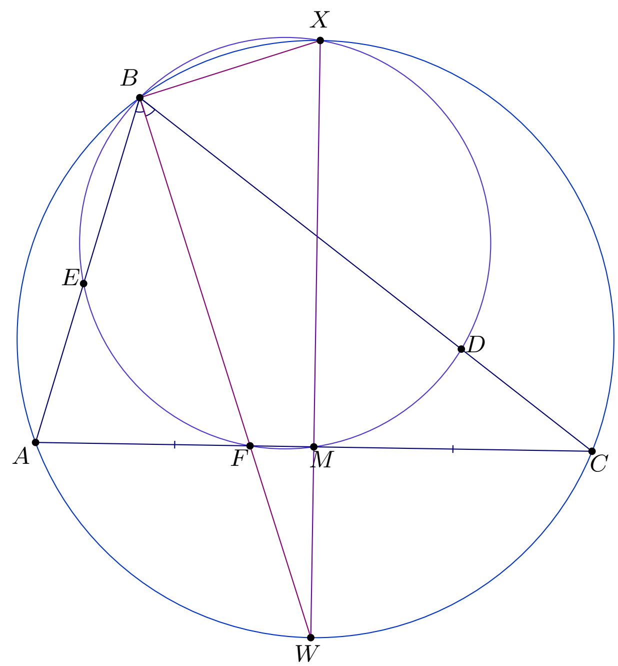
Задача 1.3 (V Кавказская МО, ст. лига)

Дан треугольник ABC, в котором $AB \neq AC$. Пусть M – середина отрезка AB, K – середина дуги BAC описанной окружности треугольника ABC, а P – точка, в которой серединный перпендикуляр к AC пересекает биссектрису угла BAC. Докажите, что точки A, M, K, P лежат на одной окружности.



Решение: по лемме о первом воробье окружность, проходящая через A, K, M пересекает сторону AC в такой точке N, что $BM = CN$. Поскольку $\triangle APC$ – р/б, $\angle ACP = \angle CAP = \angle BAP$. Значит $\triangle PCN = \triangle PAN$ по первому признаку равенства треугольников и $PM = PN$. Но биссектриса угла MAN и серединный перпендикуляр к MN пересекаются на описанной окружности $\triangle MAN$ $\Rightarrow$ $MANP$ – вписанный, и K лежит на его описанной окружности.

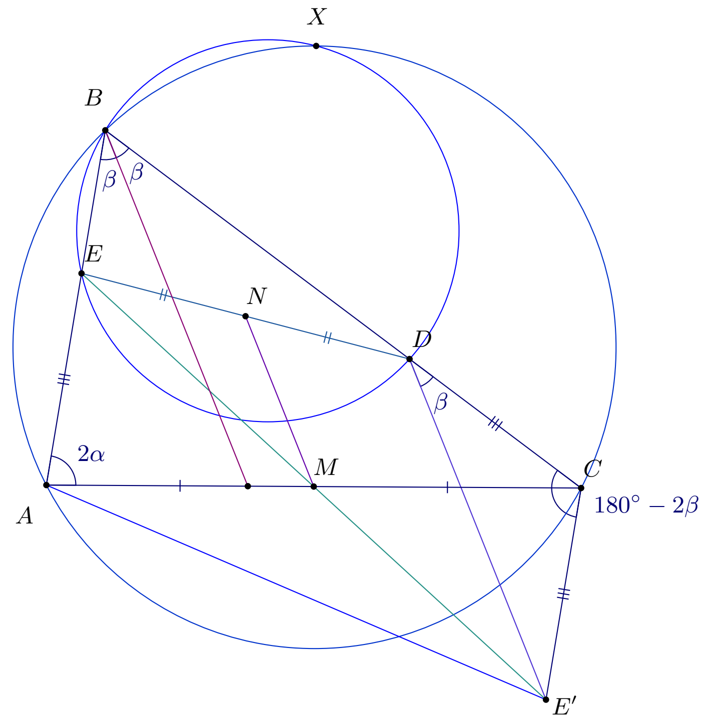
Свойство $I1$**.** Окружность, проходящая через середину дуги ABC, точку B и середину стороны AC – точку M пересекает второй раз AC в основании биссектрисы $\angle B$.



Доказательство: пусть W – середина дуги AC описанной окружности $\triangle ABC - \Omega$. Тогда XW – диаметр Ω и серединный перпендикуляр к AC. Значит $\angle WBX = \angle AMX = 90°$ и в сумме дают $180° \Rightarrow BXMF$ – вписанный. $\square$

Свойство $I2$**.** ω проходит проходит через середину дуги ABC – точку X и вершину B и пересекает стороны AB и BC в точках E и D соответственно. Точки M и N середины AC и DE соответственно. Тогда MN параллельна биссектрисе угла ABC.

Доказательство: удвоим медиану EM в $\triangle AEC$, $AECE'$ – параллелограмм. В $\triangle E'ED$ MN – средняя линия $\Rightarrow MN \parallel DE'$. Т.к. $AE = CD$ по лемме о первом воробье, $CE' = CD$, то есть $\triangle DCE'$ – р/б. Обозначим $\angle A = 2\alpha$, $\angle B = 2\beta$, тогда $\angle ACE' = 2\alpha$ и $\angle DCE' = 180° - 2\beta$. Значит $\angle E'DC = \beta$ $\Rightarrow DE'$ параллельна биссектрисе $\angle B$, но $MN \parallel DE'$. Таким образом MN параллельна биссектрисе $\angle B$. $\square$



Задача 1.4 (XXI Турнир городов 10 – 11, сложный вариант)

Точки K, L на сторонах AC, CB треугольника ABC – это точки, в которых вневписанные окружности касаются сторон. Докажите, что прямая, соединяющая середины KL и AB,

а) делит периметр треугольника ABC пополам;

б) параллельна биссектрисе угла ACB.

Решение: доказательство пункта (б) – следствие из второго свойства, достаточно упомянуть, что $AK = BL = \frac{AC+BC-AB}{2}$. Прямая MN является кливером треугольника, т.к. проходит через середину стороны и параллельна биссектрисе противолежащего угла и по определению делит периметр $\triangle ABC$ пополам.

Заметим, что иногда, если заменять внутренние объекты, связанные с биссектрисами, на внешние, могут из средних задач получаться совсем нетривиальные. Примером тому может служить следующая задача – в ней нужно применить сразу и свойство I_1, и I_2:

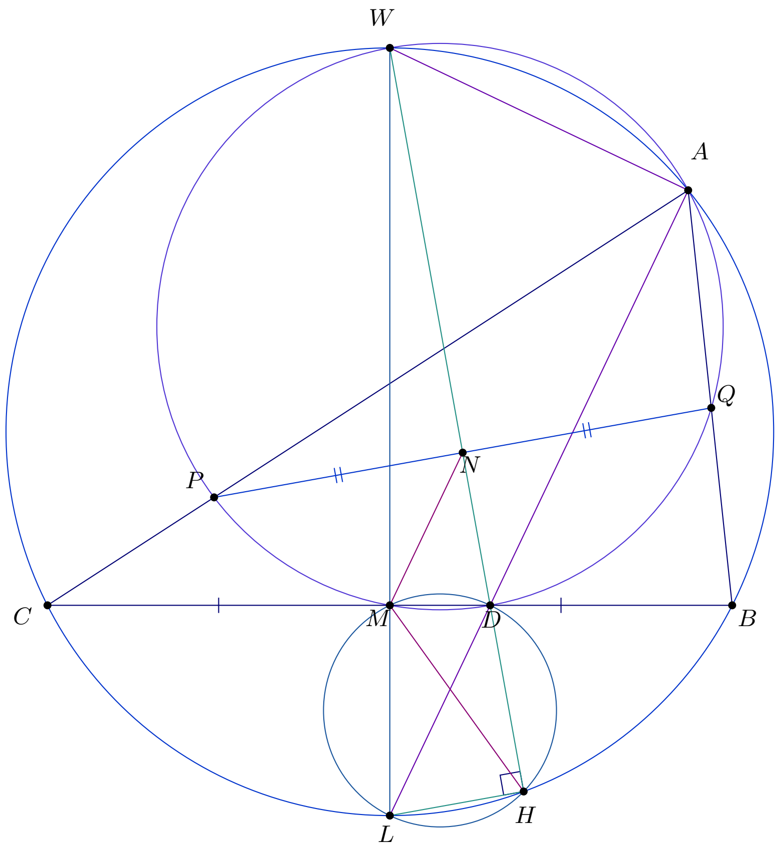
Задача 1.5 (ЮМТ 2007, Гранд-лига, 3 тур, N7)

В треугольнике ABC точка M – середина стороны BC, а точка D – пересечение внешней биссектрисы угла A с прямой BC. Описанная окружность треугольника ADM пересекает вторично сторону AC и продолжение стороны AB в точках E и F, соответственно. Точка N – середина EF. Докажите, что прямые AD и MN параллельны.

Предлагаем читателю дойти до решения самостоятельно.

Задача 1.6 (TSTST 2012)

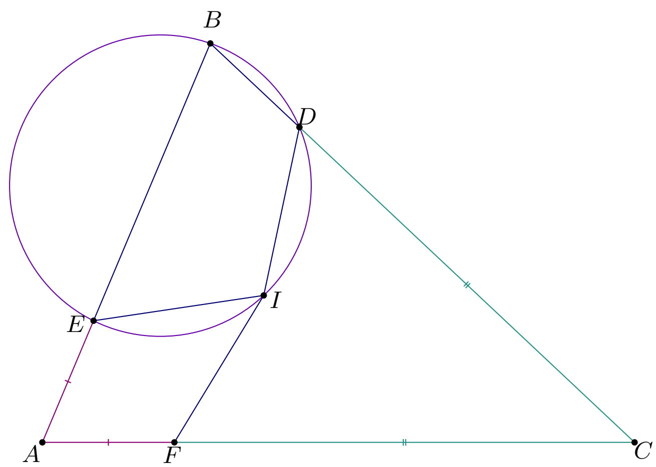
Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает сторону BC и описанную окружность $\triangle ABC$ в точках D и L соответственно. Пусть M – середина стороны BC. Описанная окружность треугольника ADM пересекает стороны AB и AC второй раз в точках Q и P соответственно. Пусть N – середина PQ, H – основание перпендикуляра из L на ND. Докажите, что прямая ML касается описанной окружности треугольника HMN.



Решение: отметим точку W – середину дуг BAC и PAQ. Точки W, M, L лежат на серпере к BC. Т.к. AD – биссектриса, $PD = QD \Rightarrow$ точки W, N, D лежат на серпере к PQ. Продлим эту прямую до пересечения с Ω в точке H'. Тогда $\angle WH'L = 90°$, т.к. WL – диаметр $\Omega \Rightarrow$ точки H и H' совпадают. Заметим, что четырехугольник $MDHL$ – вписанный, т.к. $\angle BML + \angle WHL = 180°$. Из свойств 1 и 2 – $MN \parallel AL$. Значит $\angle WMN = \angle WLA = \angle MLD = \angle MHD$ и окружность, описанная около $\triangle HMN$ касается прямой ML.

Другие задачи на лемму о воробьях можно посмотреть в статьях А.Полянского [2] и [3].

Второй воробей. ω проходит через $I \Leftrightarrow AE + CD = AC$.

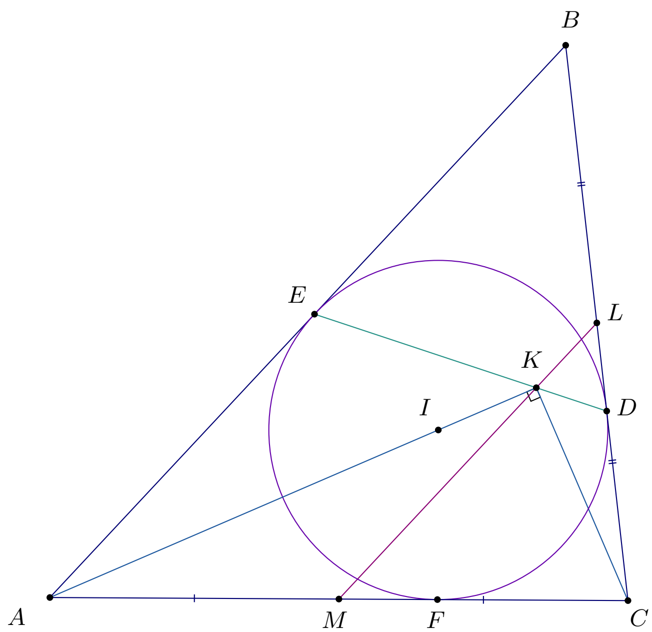


Доказательство: пусть F – точка, симметричная E относительно AI. Тогда $\angle AEI = \angle AFI = 180^\circ - \angle CFI$ Т.к. $BDIE$ – вписанный, то $\angle CDI = \angle DEI$. Но $\angle BEI = 180^\circ - \angle AEI$. Значит $\angle CFI = \angle CDI$ и $\triangle CFI = \triangle CDI \Rightarrow CF = CD$.

2. BI – диаметр ω

Тогда ω проходит через точки касания вписанной окружности со сторонами AB и BC. Пусть Z – основание перпендикуляра из F на DE, точки H_A, H_B, H_C – основания высот из вершин A, B, C соответственно.

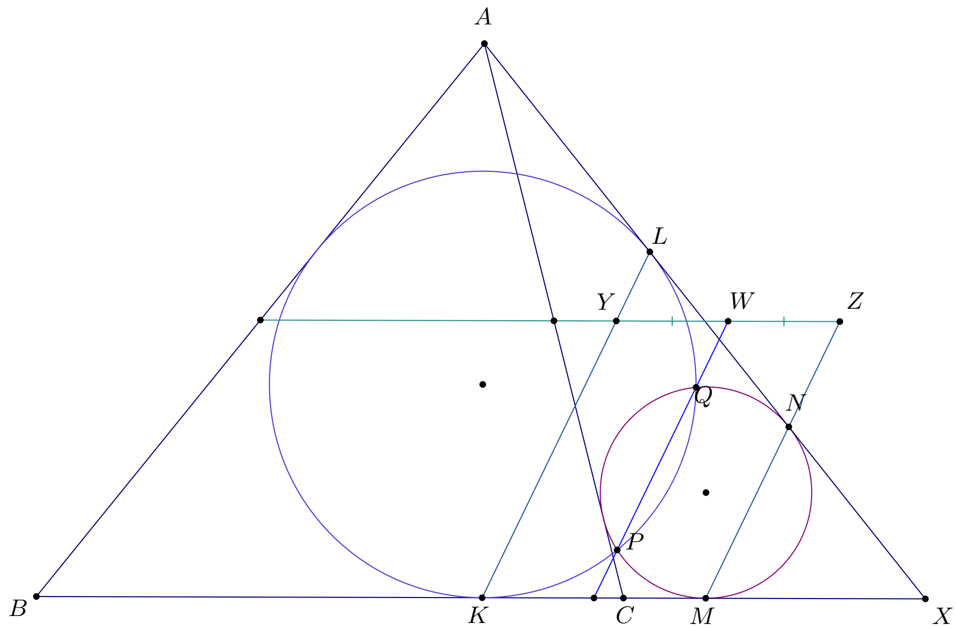
> **Задача №255.** Пусть K – точка пересечения биссектрисы угла A с прямой DE. Тогда $\angle AKC = 90°$ и K лежит на средней линии $ML \parallel AB$ треугольника ABC.



Доказательство: пусть $\angle A = 2\alpha$, $\angle C = 2\gamma$. Тогда $\angle BED = \alpha + \gamma \Rightarrow \angle AKE = \gamma$. Т.к. F симметрична E относительно биссектрисы угла A – $\angle AKF = \gamma$. Но $\angle ICF = \frac{\angle C}{2} = \gamma$. Значит $IKCF$ – вписанный и $\angle IKC = \angle IFC = 90°$. Точка C', симметричная C относительно AK лежит на AB, т.к. AK – биссектриса. Значит K – середина CC' и лежит на средней линии ML, параллельной AB. $\square$

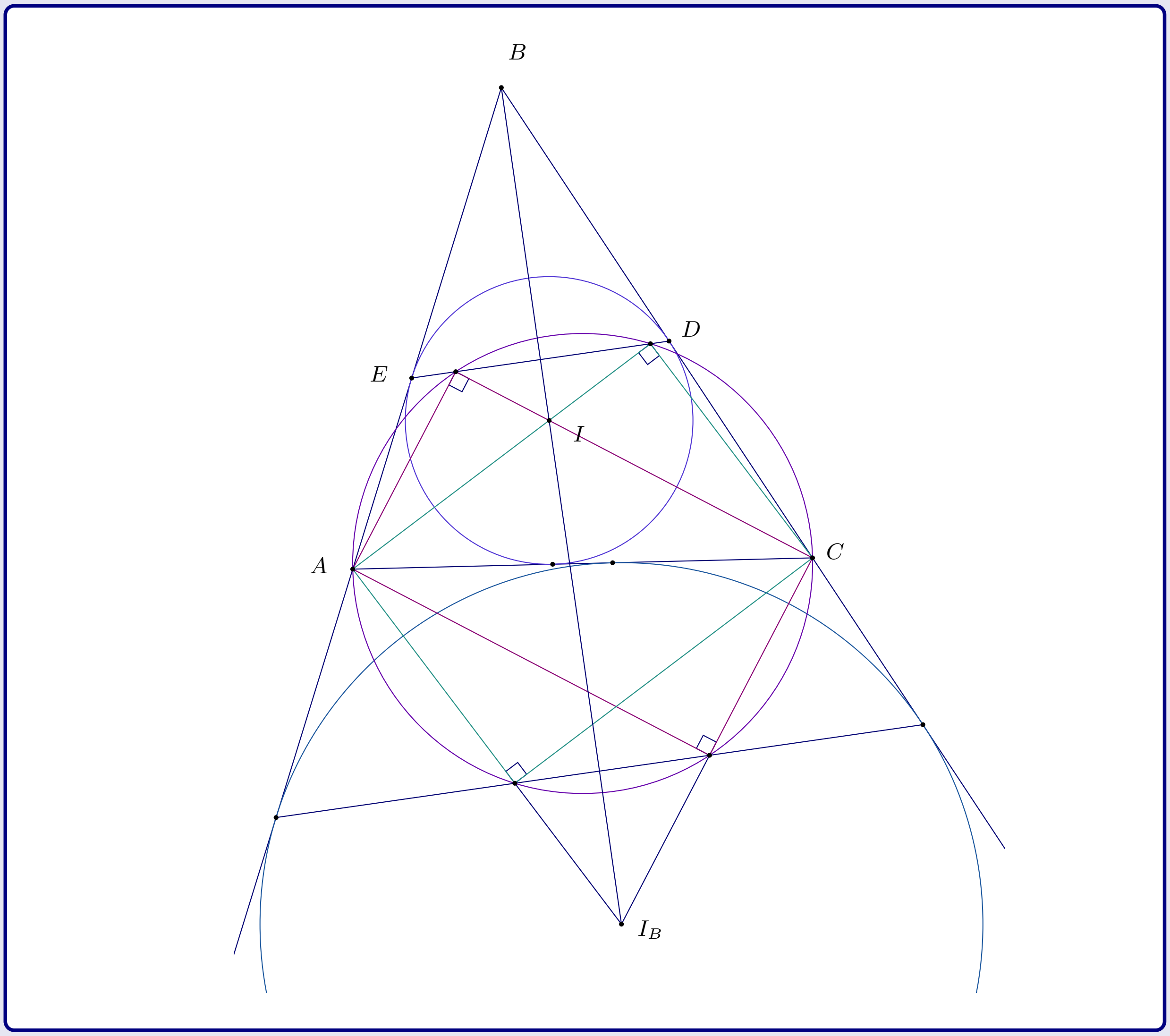
Задача 1.7 (Квант, Л.Емельянов, М1990)

Дан треугольник ABC. На продолжении стороны BC за точку C выбирается точка X. Окружности, вписанные в треугольники ABX и ACX, пересекаются в точках P и Q. Докажите, что все прямые PQ проходят через некоторую точку, не зависящую от положения точки X.



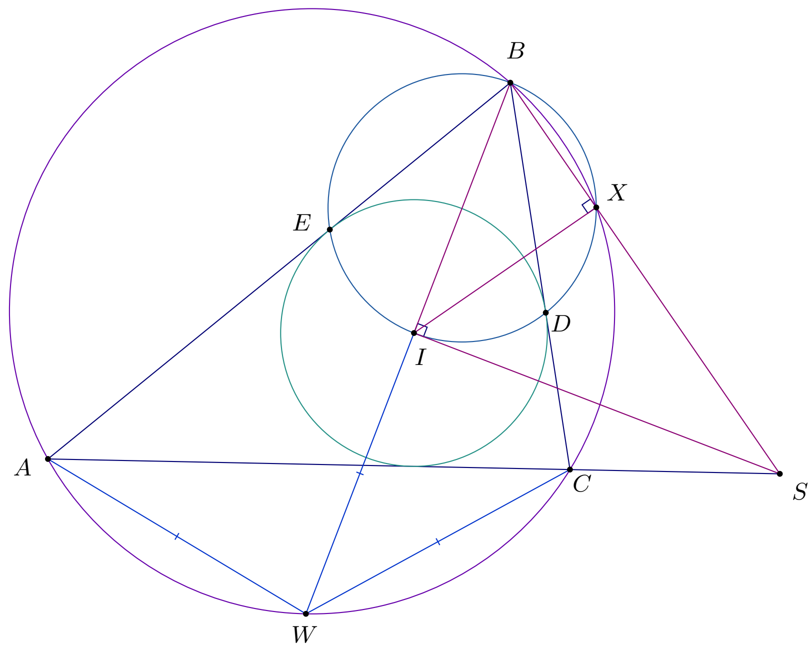
Решение: обозначим окружности вписанные в $\triangle ABX$ и $\triangle ACX$ за ω_B и ω_C соответственно. Пусть ω_B касается сторон AX и BX в точках L и K соответственно; ω_C касается сторон AX и CX в точках N и M соответственно. По задаче №255 – биссектриса $\angle ABC$ и KL пересекаются в постоянной точке Y, лежащей на средней линии $\triangle ABX$, параллельной BX. Аналогично, биссектриса $\angle ACX$ и MN пересекаются в постоянной точке Z, лежащей на средней линии $\triangle ACX$, параллельной CX. Значит $YZ \parallel BC$. Т.к. отрезки касательных $KX = LX$ и $MX = NX$, $\triangle KXL$ и $\triangle MXN$ – равнобедренные $\Rightarrow KL \parallel MN$ и $KYZM$ – параллелограмм. Общая хорда ω_B и ω_C – PQ также параллельна KL и MN и проходит через середину KM $\Rightarrow$ пересекает отрезок YZ в его середине. Но середина отрезка YZ – W не зависит от выбора точки X. Значит PQ всегда проходит через W. $\square$

Замечание *I3.* Те же свойства у аналогичных точек вневписанных окружностей. Так получается три четверки точек, лежащих на окружностях, диаметры которых – стороны треугольника.



Таким образом, на рассматриваемой окружности ω лежат такие точки: P – точка пересечения биссектрисы $\angle A$ и прямой DF, R – точка пересечения биссектрисы $\angle C$ и прямой EF, которые лежат на средней линии $\triangle ABC$, параллельной AC.

Свойство $I3$. Касательная в I к ω, BX и AC пересекаются в одной точке.

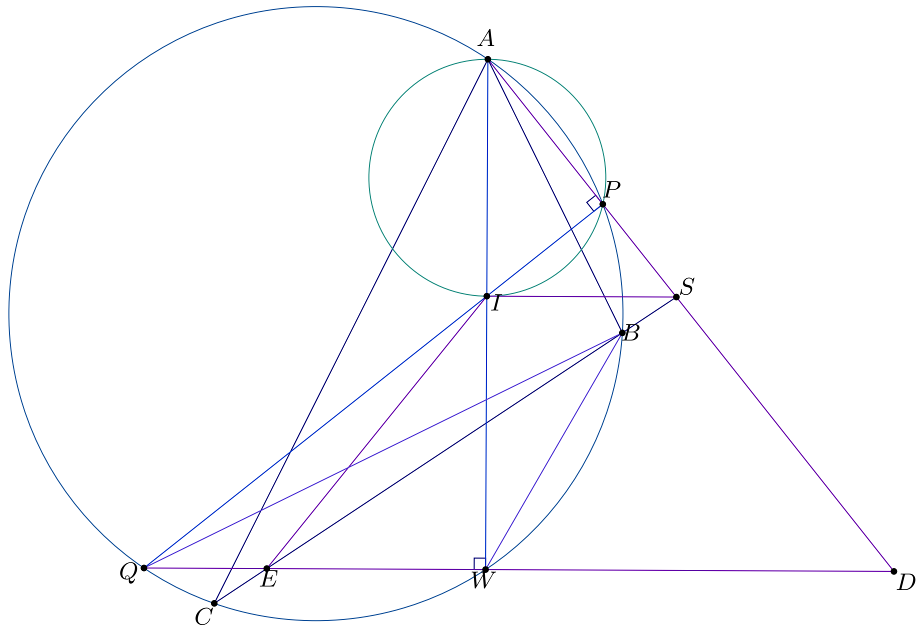


Доказательство: обозначим окружность, описанную около $\triangle AIC$ (по лемме о трезубце W – ее центр) за Γ_B. Заметим, что Γ_B касается $\omega \Rightarrow$ их радикальная ось – перпендикуляр к BI в точке I. Радось Ω и Γ_B – AC, а Ω и ω – BX. Значит касательная в I к ω, BX и AC пересекаются в радикальном центре этих окружностей. □

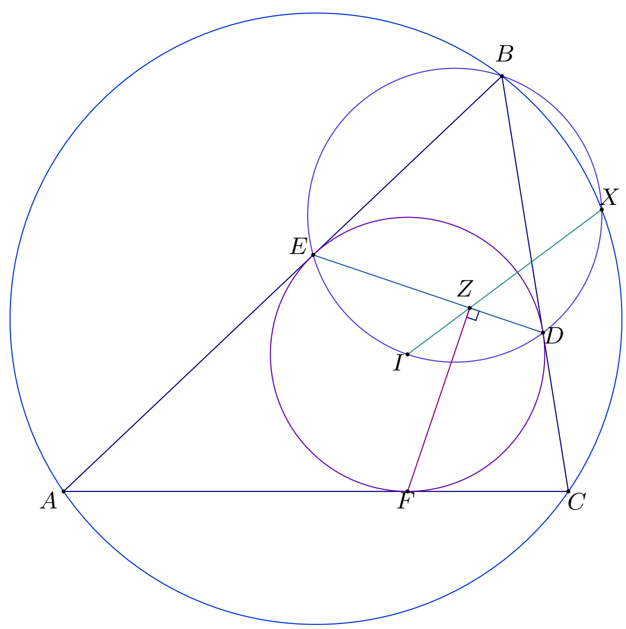
Задача 1.8 (XX Киевский матфестиваль, 10.5)

Пусть ω – описанная окружность треугольника ABC ($AB \neq AC$), I – центр вписанной окружности, P – точка на ω, для которой $\angle API = 90°$, S – точка пересечения прямых AP и BC, W – точка пересечения прямой AI с ω. Прямая, проходящая через точку W перпендикулярно к AW, пересекает AP и BC в точках D и E соответственно. Доказать, что $SD = IE$.

Решение: по свойству $I3$ SI – касательная к окружности, описанной около прямоугольного $\triangle API$. Значит $SI \perp AI$ и $SI \parallel DE$. Докажем, что $DSIE$ – равнобокая трапеция. Треугольники BWQ и EWB подобны, т.к. угол при вершине W – общий и $\angle WQB = \angle WBC = \angle WBE$. Значит $\frac{BW}{WQ} = \frac{EW}{WB}$, но по лемме о трезубце $BW = WI \Rightarrow \frac{WI}{WQ} = \frac{WE}{WI}$ и $\triangle QWI \sim \triangle IWE$. Таким образом, $\angle WEI = \angle WIQ = \angle AIP = \angle ADW$. То есть углы при основании трапеции $SDIE$ равны $\Rightarrow SD = IE$.



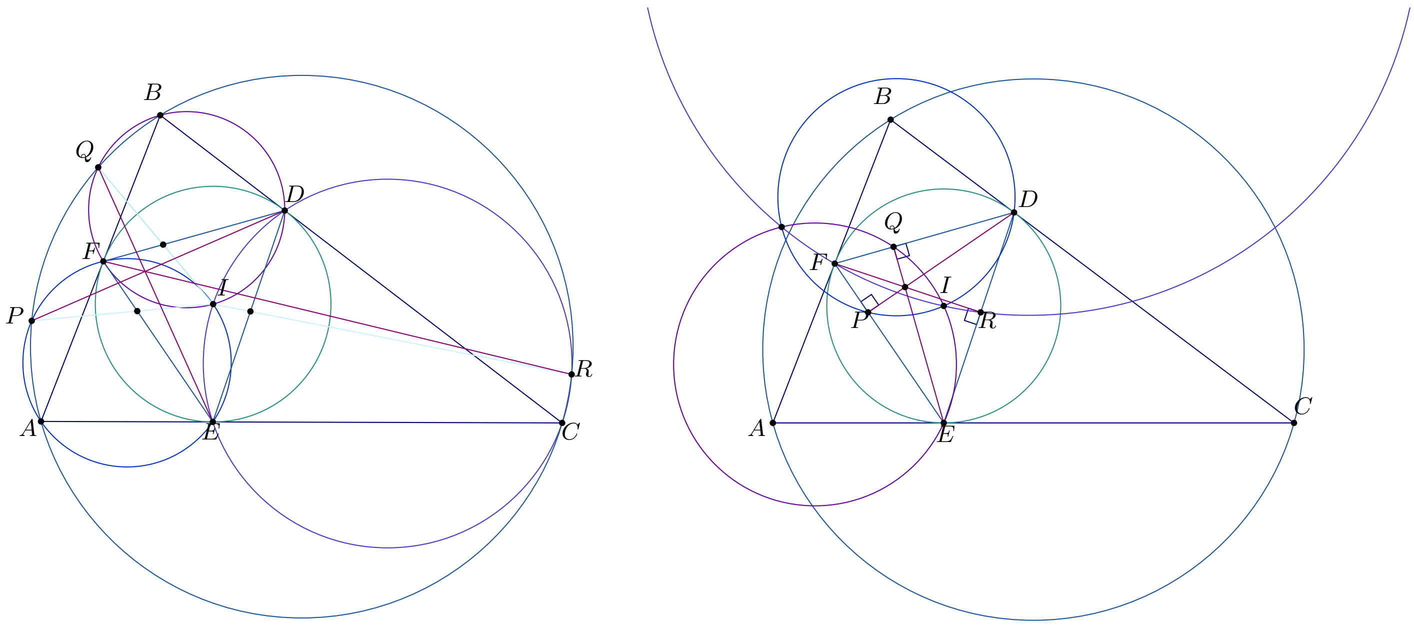
Sharky-Devil configuration [4]. Точки Z, X, I лежат на одной прямой.



Доказательство: при инверсии относительно вписанной окружности $\triangle ABC$ окружность 9 точек $\triangle DEF$, которая проходит через Z переходит в окружность Ω. С другой стороны, при такой инверсии прямая DE, на которой лежит точка Z переходит в окружность ω. Значит образ точки Z переходит в точку пересечения окружностей ω и Ω, лежащую на луче IZ. $\square$

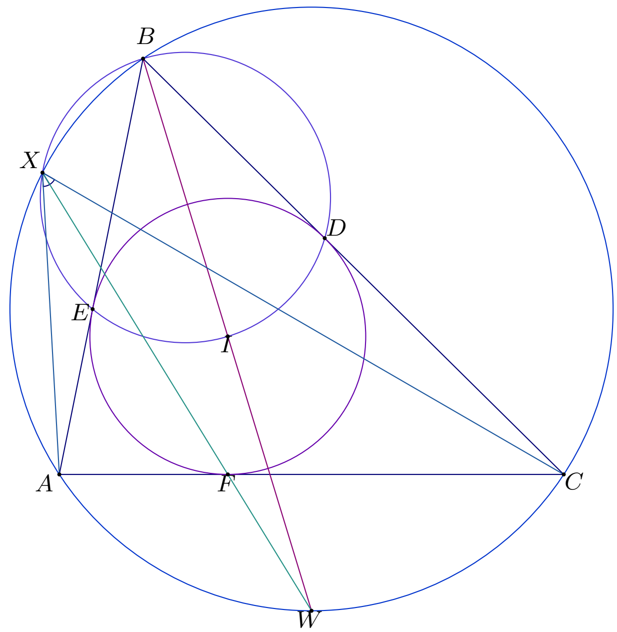
Задача 1.9 (Canada National Olympiad 2007/5).

Пусть вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон BC, CA и AB в точках D, E и F соответственно. Обозначим за ω, ω_1, ω_2, ω_3 окружности, описанные около треугольников ABC, AEF, BDF и CDE соответственно. Пусть ω и ω_1 пересекаются в A и P, ω и ω_2 пересекаются в B и Q, ω и ω_3 пересекаются в C и R. Докажите, что PD, QE и RF пересекаются в одной точке.



Решение: после инверсии относительно вписанной окружности $\triangle ABC$ точки P, Q, R перейдут в соответствующие основания высот $\triangle DEF$. Если прямые PD, QE и RF пересекаются в одной точке, то окружности, в которые эти прямые перейдут имеют радикальную ось. Это так, поскольку все они проходят через инцентр, а ортоцентр $\triangle DEF$ имеет одинаковую степень точки относительно каждой из окружностей.

Свойство $I4$**.** XF – биссектриса $\angle AXC$.



Доказательство: из замечания $I1$ – $\frac{AX}{CX} = \frac{AE}{CD}$, но отрезки касательных $AE = AF$ и $CD = CF \Rightarrow \frac{AX}{CX} = \frac{AF}{CF}$. Значит XF – биссектриса $\angle AXC$ и проходит через середину дуги AC. □

На самом деле это свойство – частный случай следующей задачи. Воспользуйтесь леммой о втором воробье и решите ее, проведя рассуждения, аналогичные рассуждениям из доказательства свойства $I4$:

Задача 1.10 (Австралийская МО, 2021, №8).

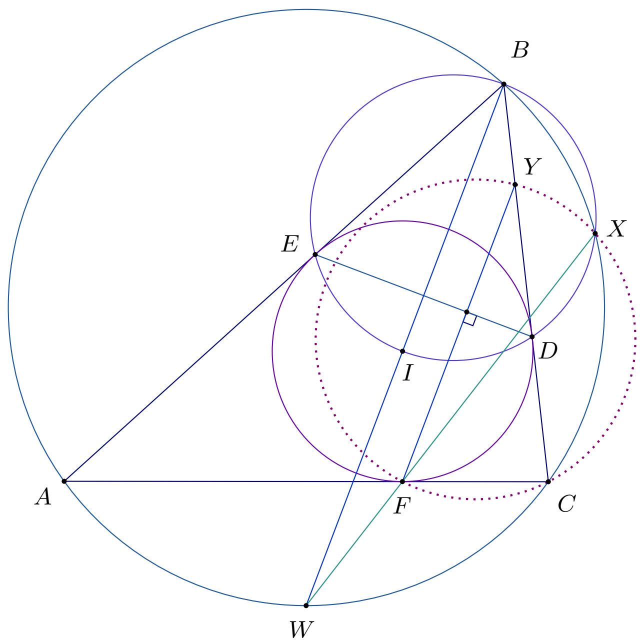
Точка I – центр вписанной окружности треугольника ABC. Пусть точка D – переменная точка на дуге AB окружности, описанной около треугольника ABC. Точка E на стороне BC такова, что $\angle ADI = \angle IEC$. Докажите, что когда D меняется, прямая DE проходит через фиксированную точку.

Задача 1.11 (Олимпиада памяти Сайяра Утяганова, 9 кл., N4)

В треугольник ABC ($AB > BC$) вписана окружность, касающаяся его сторон BC, CA и AB в точках D, E и F соответственно. Пусть ω – окружность, описанная около треугольника ABC. Точка M – середина отрезка AF, точка N – середина отрезка CD. Окружность, описанная около треугольника BMN, пересекает ω в точках B и K. Биссектриса угла ABC пересекает ω в точках B и L. Докажите, что точки K, E и L лежат на одной прямой.

Задача 1.12 (Francophone MO 2020, Sen.3)

Пусть ABC – остроугольный треугольник, в котором $AB > BC$. Вписанная окружность $\triangle ABC$ касается его сторон в точках $D \in BC$, $E \in AB$, $F \in AC$. Перпендикуляр из точки F на DE пересекает BC в точке Y, и $X = (ABC) \cap (DBE)$. Докажите, что C, F, X, Y лежат на одной окружности.



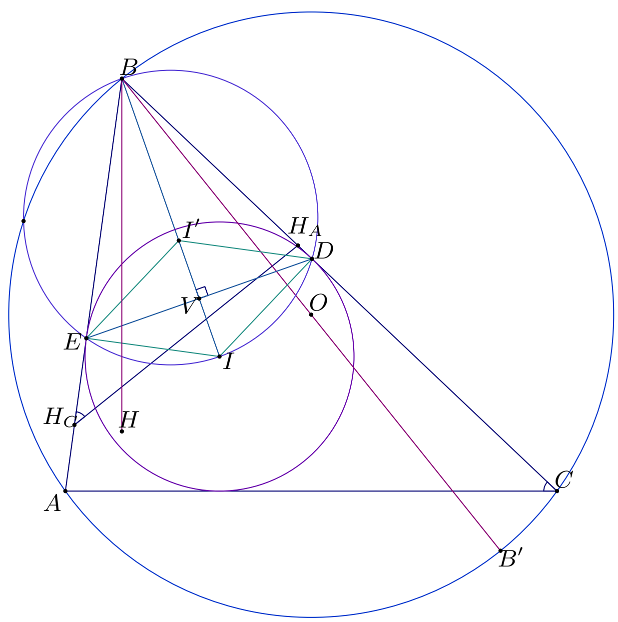
Решение: из свойства $I4$ – точки X, F и середина дуги AC – W лежат на одной прямой. Тогда $\angle CXF = \angle CXW = \angle CBW$. Но $\angle CBW = \angle CYF$, т.к. прямые $BW \parallel YF$ (BW и YF перпендикулярны DE). Значит $\angle CXF = \angle CYF$ и точки C, X, Y, F лежат на одной окружности.

Свойство $I5$ **или** $H_B^{\frac{1}{cos\beta}} \circ S_{BI}$**.** Пусть при указанном преобразовании H переходит в B', а при обратном – I переходит I'. Тогда BB' – диаметр Ω, а I' – ортоцентр $\triangle DBE$.

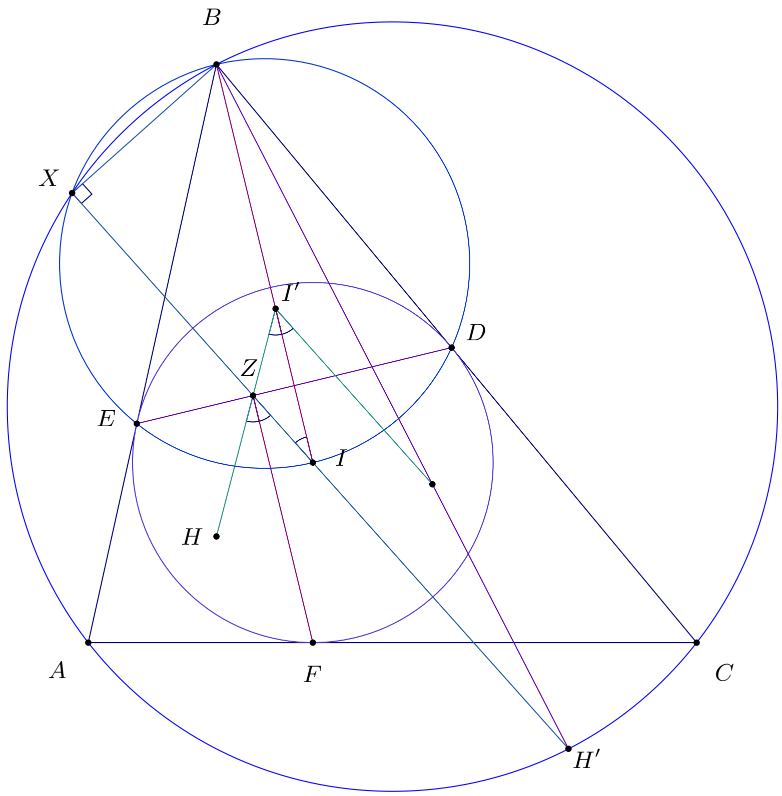
Доказательство: $H_B^{\frac{1}{cos\beta}} \circ S_{BI}$ – композиция симметрии относительно биссектрисы BI и гомотетии с центром в B и коэффицентом $k = \frac{1}{cos\beta}$, где β – угол при вершине B. Такое преобразование переводит $\triangle H_A B H_C$ в $\triangle ABC$, т.к. эти треугольники подобны с коэффицентом $\frac{BH_A}{AB}$ и после гомотетии симметричны относительно биссектрисы. При этом ω переходит в Ω, а точка H – диаметрально противоположная точке B на ω перейдет в ей соответствующую на Ω – то есть B'.

При обратном преобразовании меняется только коэффицент гомотетии. Заметим, что если отразить ортоцентр равнобедренного $\triangle DBE$ относительно его основания DE, то он попадет на описанную окружность $\triangle DBE$. Но $DBEI$ – вписанный, значит достаточно доказать, что I и I' симметричны относительно DE.

Пусть I_1 – образ точки I при симметрии относительно DE, а r – радиус вписанной окружности. Тогда $\frac{BI_1}{BI} = \frac{BI-2IV}{BI} = 1-2\frac{r}{BI}sin\frac{\beta}{2} = 1-2sin^2\beta = cos\beta$. Значит I_1 и I' совпадают. $\square$



Задача 1.13 Точки I и H – инцентр и ортоцентр $\triangle ABC$ соответственно. Вписанная окружность $\triangle ABC$ касается сторон BC, AB и AC в точках D, E и F соответственно. Точка Z – основание перпендикуляра из F на DE. Докажите, что $\angle FZH = \angle FZI$.



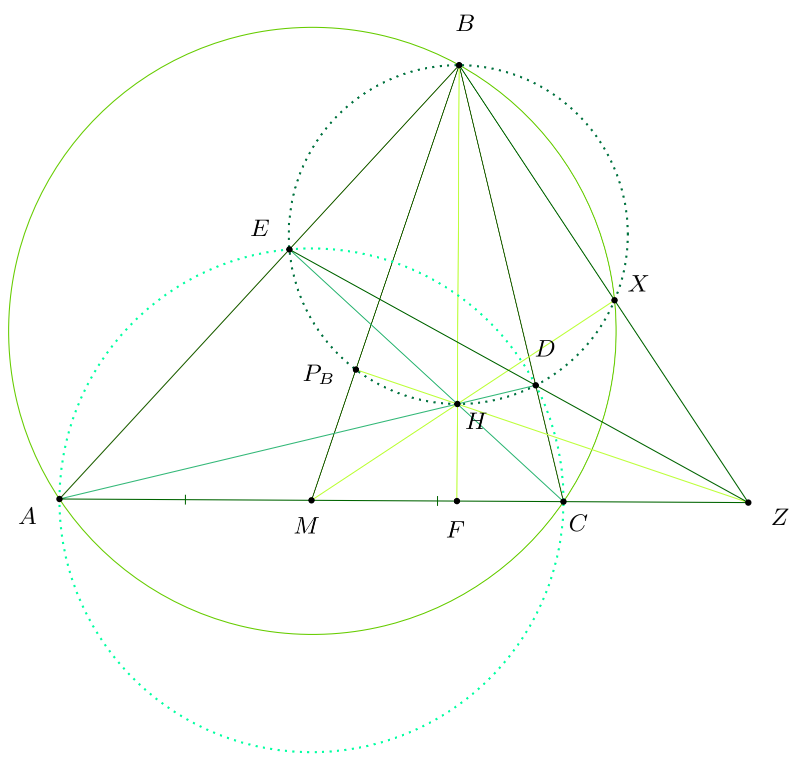
Решение: отразим точку I относительно DE – I'. Тогда надо доказать, что точки H, Z, I' лежат на одной прямой. Это условие равносильно тому, что прямая, симметричная HI' относительно биссектрисы BI параллельна ZI. Сделаем $H_B^{\frac{1}{cos\beta}} \circ S_{BI}$. Тогда I' перейдет в I, а H – в H', диаметрально противоположную точке B. Остается доказать, что $H'I$ проходит через Z. Из SD леммы – прямая IZ проходит через точку X – пересечения описанных окружностей $\triangle ABC$ и $\triangle DBE$. Т.к. $\angle BXI = 90°$, то в описанной около $\triangle ABC$ окружности он опирается на диаметр, то есть BH'. Значит все четыре точки: X, Z, I, H' лежат на одной прямой, что и требовалось. $\square$

Часть II. Конструкции, связанные с H

В конструкциях, связанных с ортоцентром $\triangle ABC$ – точка X такая, что $\angle BXH = 90^\circ$, а окружность ω проходит через B, X, H. Таким образом, на ω лежат также основания высот из вершин A и C. В иностранных источниках точка X, определенная таким образом, носит название Queue-point.

1. Z – точка пересечения BX и AC

Ортоцентр $\triangle MBZ$. Пусть M – середина стороны AC, тогда ортоцентр $\triangle ABC$ также является ортоцентром $\triangle MBZ$.



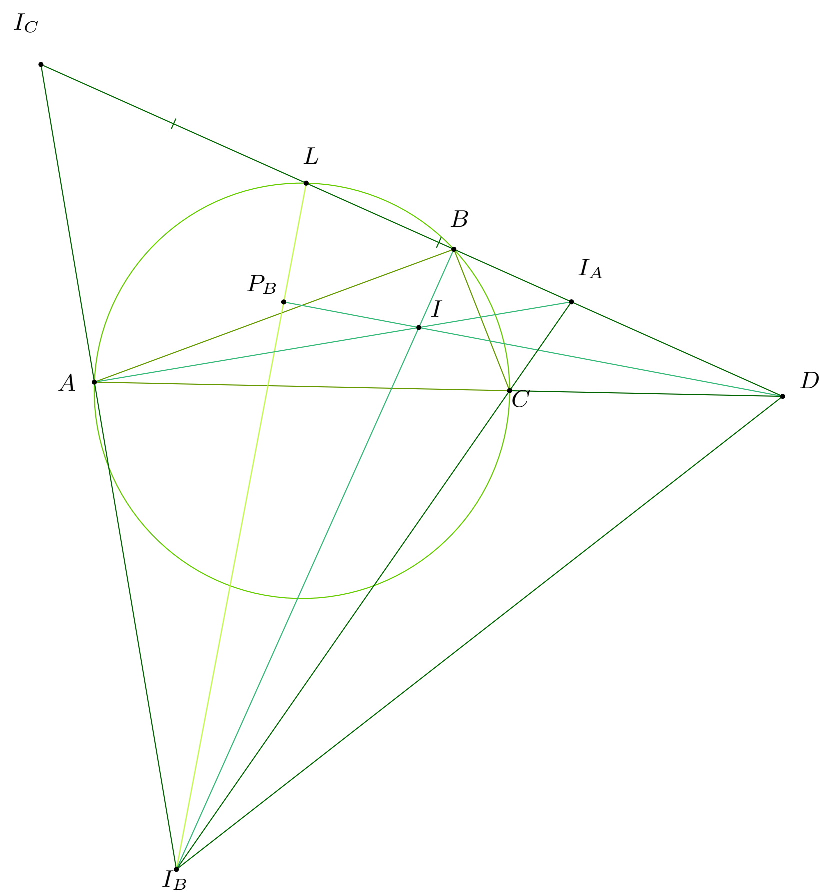
Доказательство 1: четырехугольник $AEDC$ – вписанный ($\angle AEC = \angle ADC = 90^\circ$). H – точка пересечения его диагоналей. Прямая HX перпендикулярна прямой BZ, соединяющей точки пересечения противоположных сторон $AEDC$. Значит HX проходит через центр описанной окружности $AEDC$ – середину стороны AC – точку M. Таким образом, $MH \perp BZ$, $BH \perp MZ \Rightarrow H$ – ортоцентр $\triangle MBZ$. $\square$

Доказательство 2: ортоцентр, отраженный относительно середины стороны – H' попадает на Ω, причем BH' – диаметр. Т.к. $\angle BXH = 90^\circ$, то он опирается на диаметр Ω – $BH' \Rightarrow X$, H, H' лежат на одной прямой, а значит и M лежит на ней же. Поскольку $MH \perp BZ$, $BH \perp MZ$, H – ортоцентр $\triangle MBZ$. $\square$

Замечание $H1$**.** Во втором доказательстве не упоминается о том, что DE проходит через Z. Это легко доказать через радикальные оси. Обозначим окружность, описанную около $AEDC$ как ω_H. Тогда AC – радось Ω и ω_H, DE – радось ω_H и ω, BX – радось ω и Ω. Значит BX, DE, AC пересекаются в радикальном центре Ω, ω_H, ω – точке Z.

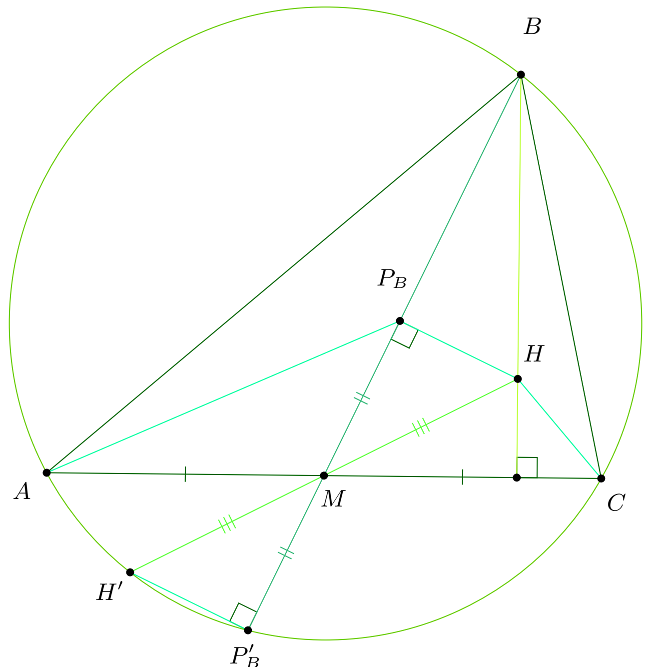
Задача 2.1

Внешняя биссектриса угла B треугольника ABC пересекает продолжение стороны AC в точке D. Пусть I – центр вписанной окружности, I_B – центр вневписанной окружности, касающейся стороны AC, а L – середина большей дуги AC описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что $DI \perp LI_B$.



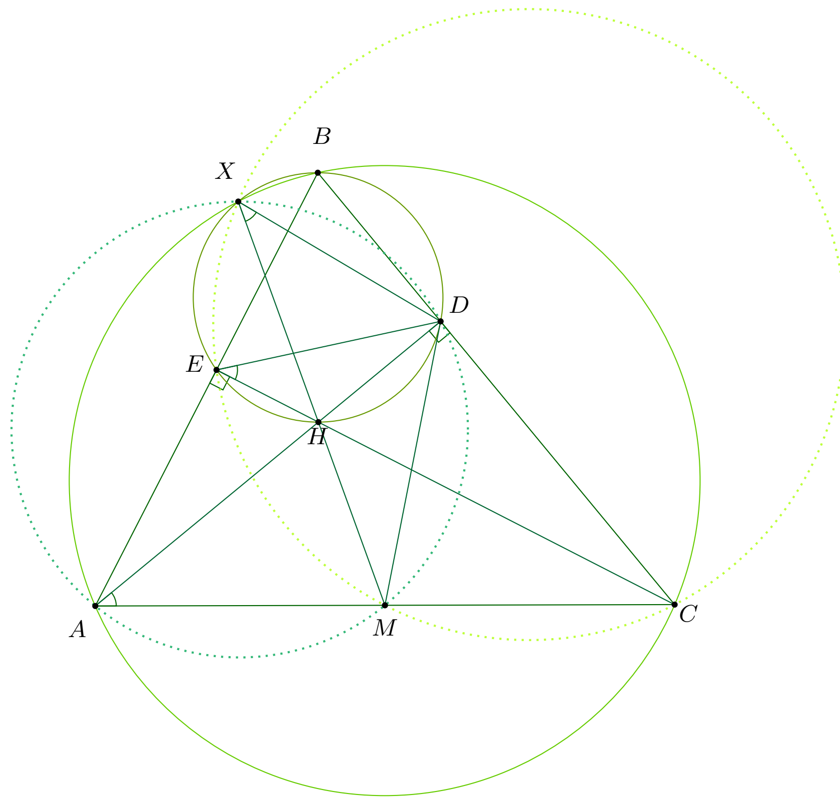
Решение: по лемме о трезубце L – середина отрезка I_AI_C. В $\triangle I_AI_BI_C$ точка I является ортоцентром, а точки A и C основаниями высот из вершин I_A и I_C соответственно. Из конструкции, описанной выше – I является также ортоцентром $\triangle LI_BD \Rightarrow DI$ – перпендикуляр из D на LI_B.

Точка Шалтая. Основание высоты $\triangle MBZ$ из вершины Z является точкой Шалтая $\triangle ABC$ против вершины B. То есть такой точкой P_B, что окружности, описанные около треугольников BP_BA и BP_BC, касаются прямой BC.



Доказательство: точка пересечения высот $\triangle MBZ$ – H. Значит достаточно доказать, что точка Шалтая является проекцией H на медиану BM. $\angle P_BAC = \angle ABP_B = \alpha$ и $\angle P_BCA = \angle CBP_B = \beta$ как углы между касательной AC и хордами AP_B и CP_B соответственно $\Rightarrow \angle AP_BC = 180° - \alpha - \beta$. Тогда P_B, отраженная относительно M лежит на Ω и является точкой пересечения Ω и медианы BM – обозначим ее за P'_B. Точка H', симметричная H относительно M также лежит на Ω и является диаметрально противоположной точке $B \Rightarrow \angle BP'_BH' = 90°$. Но $P_BHP'_BH'$ – параллелограмм $\Rightarrow \angle BP'_BH' = \angle P'_BP_BH = 90°$. $\square$

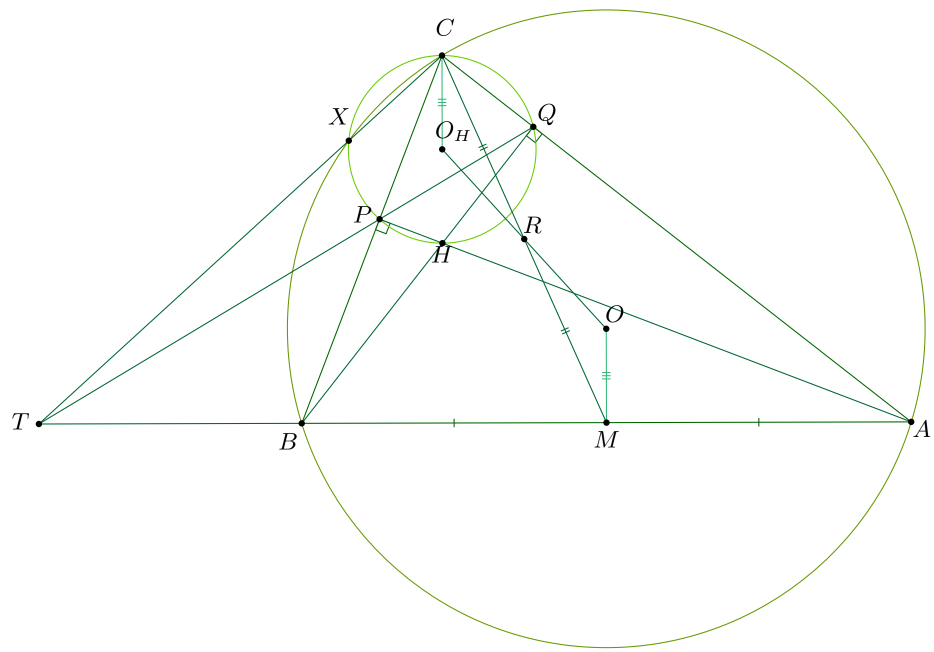
Свойство $H1$**.** Четырехугольники $AMDX$ и $CMEX$ – вписанные; XM – биссектриса углов AXD и CXE.



Доказательство: четырехугольник $AEDC$ – вписанный, точки X, H, M лежат на одной прямой $\Rightarrow \angle MAD = \angle CAD = \angle CED = \angle HED = \angle HXD = \angle MXD$. Значит $\angle MAD = \angle MXD$. $\square$

Задача 2.2 (Устная олимпиада по геометрии 2013, 10 – 11, №5)

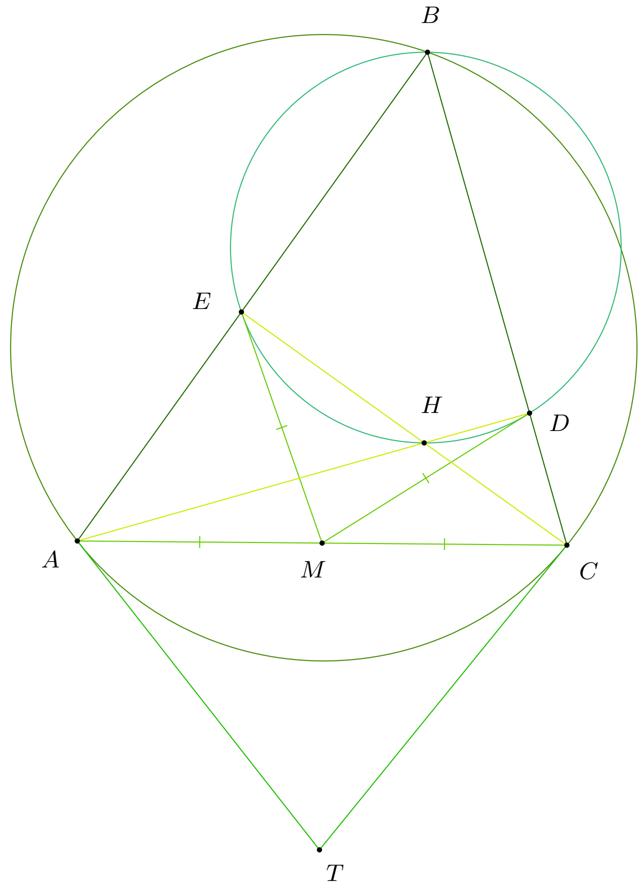
В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AP и BQ, а также медиана CM. Точка R – середина CM. Прямая PQ пересекает прямую AB в точке T. Докажите, что $OR \perp TC$, где O – центр описанной окружности треугольника ABC.



Доказательство: пусть O_H – центр окружности, описанной около $\triangle CPQ$. Тогда $CO_H = \frac{CH}{2} = OM$ и $CO_H \perp AB$. Т.к. CO_H и OM равны и параллельны, $COMO_H$ – параллелограмм. Значит R – середина CM является точкой пересечения диагоналей $COMO_H$ и точки O, R и O_H лежат на одной прямой. Точка X – пересечения окружностей, описанных около $\triangle ABC$ И $\triangle CPQ$ лежит на $TC \Rightarrow CX$ – общая хорда этих окружностей и перпендикулярна линии их центров OO_H, а значит и OR.

2. T – точка пересечения касательных в A и C к Ω

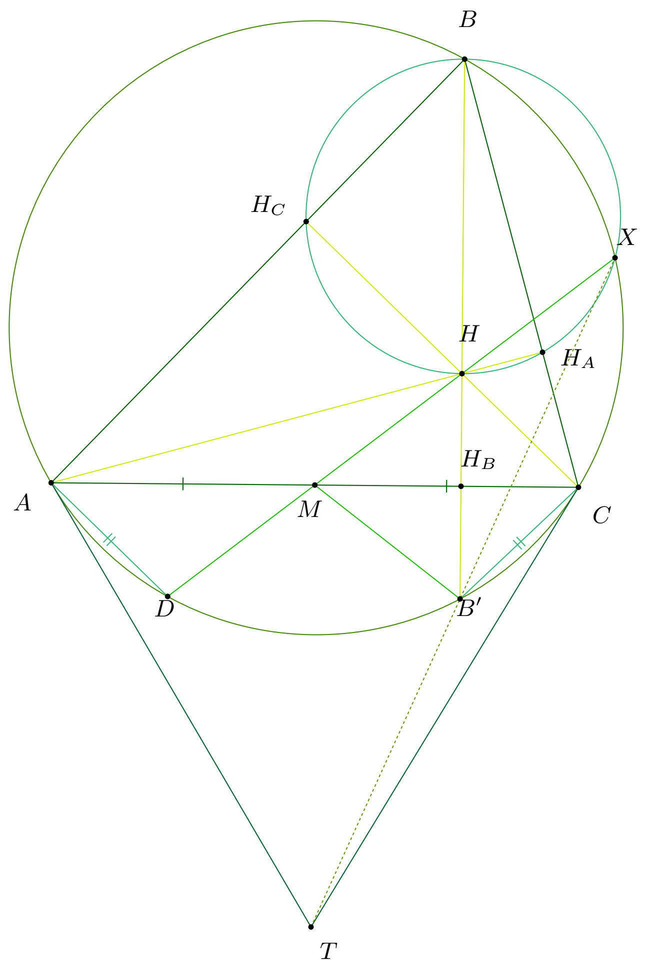
Свойство $H2$ и снова $H_B^{\frac{1}{cos\beta}} \circ S_{BI}$. При такой композиции M переходит в T.



Доказательство: из предыдущей части известно, что такое преобразование переводит $\triangle DBE$ в $\triangle ABC$, а ω в Ω. Тогда касательные в вершинах D и E к ω перейдут в им соответствующие касательные в вершинах A и C к Ω. По лемме о 3 касательных [5] ME и MD – касательные к ω. Значит точка пересечения касательных – M перейдет в T.

Замечание $H2$. Важным следствием из свойства $H2$ является то, что BM и BT – изогонали, то есть BT – симедиана $\triangle ABC$

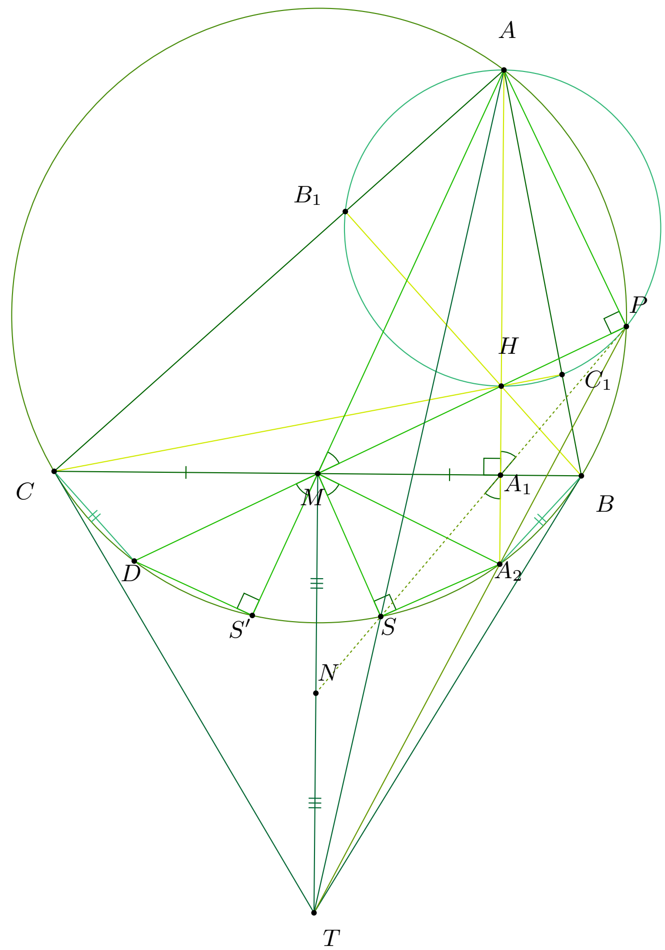
Свойство $H3$**.** Ортоцентр, отраженный относительно AC, точки T, X лежат на одной прямой.



Доказательство: по T конструкции XT – симедиана $\triangle AXC$. Значит достаточно доказать, что XB' – симедиана $\triangle AXC$, где B' – пересечение высоты BH с Ω. $\angle AXM = \angle AXD = \angle ABD = 90^\circ - \angle C = \angle CBH_B = \angle CBB' = \angle CXB'$. То есть XB' симметрична медиане XM относительно биссектрисы $\angle AXC$. Значит прямая XB' – симедиана $\triangle AXC$ и совпадает с прямой XT.

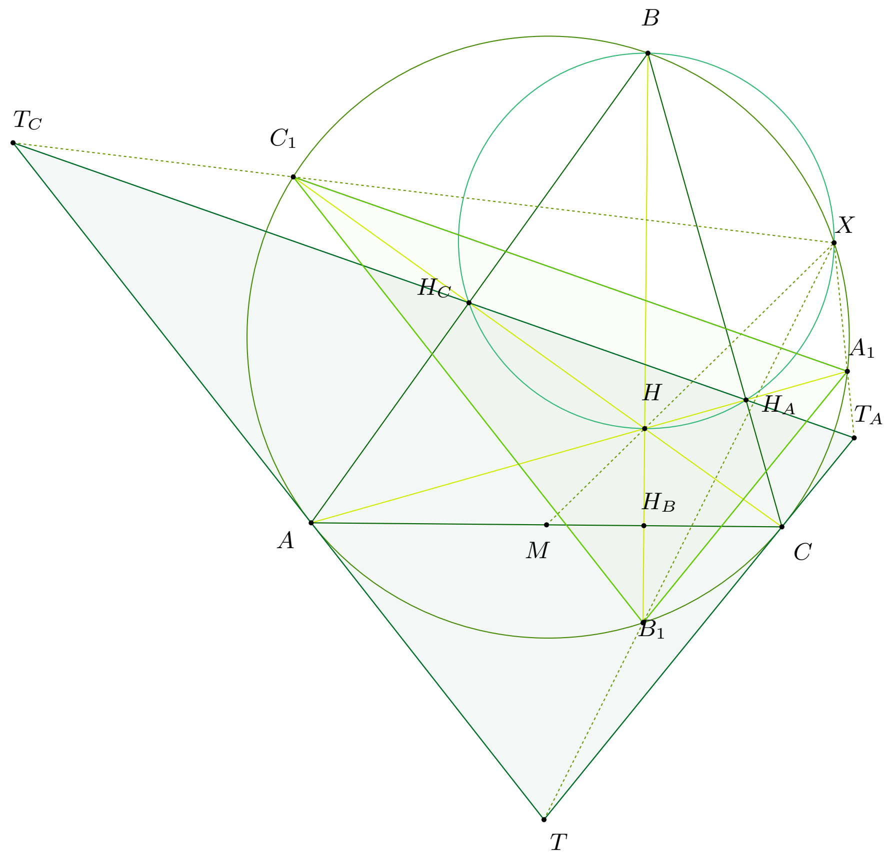
Задача 2.3 (Устная олимпиада по геометрии 2017, 10 – 11, №6)

В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Пусть ω – его описанная окружность, точка M – середина стороны BC, P – вторая точка пересечения описанной окружности треугольника AB_1C_1 и ω, T – точка пересечения касательных к ω, проведенных в точках B и C, S – точка пересечения AT и ω. Докажите, что P, A_1, S и середина отрезка MT лежат на одной прямой.



Решение: отрезки касательных $TB = TC \Rightarrow MT$ – серпер к BC и $MT \perp BC$. Пусть A_2 – ортоцентр, отраженный относительно BC. По свойству $H3$ точки T, A_2, P лежат на одной прямой. Также точки M, H, P лежат на одной прямой. Значит MHA_2T – трапеция и P – точка пересечения ее боковых сторон. Пусть точка N – середина MT. По свойству трапеции точки P, A_1, N лежат на одной прямой. Докажем, что точки P, A_1, S лежат на одной прямой. Пусть S' – пересечение медианы AM с ω, а H' – ортоцентр, отраженный отн. M. Тогда пары точек A_2, H' и S, S' симметричны отн. MT (высота и диаметр из одной вершины – изогонали, медиана и симедиана – изогонали). То есть $\triangle MS'H'$ и $\triangle MSA_2$ симметричны отн. MT. $\angle APM = 90^\circ = AA_1M \Rightarrow APA_1M$ – вписанный. Тогда $\angle SMA_2 = \angle S'MH' = \angle AMP = \angle AA_1P$. Т.к. AH' – диаметр, $\angle AS'H' = 90^\circ$. Значит $\angle MSA_2 = 90^\circ = \angle MA_1A_2$ и MA_1A_2S – вписанный. Таким образом, $\angle SMA_2 = \angle SA_1A_2 = \angle AA_1P$ и точки P, A_1, S лежат на одной прямой. Т.к. P, A_1, N и P, A_1, S лежат на одной прямой, то P, A_1, N, S лежат на одной прямой.

Другая гомотетия. Рассмотрим $\triangle T_ATT_C$, образованный пересечением касательных в точках A и C и прямой DE. Он гомотетичен треугольнику, образованному точками пересечения высот с описанной окружностью. Причем центр гомотетии – точка X.

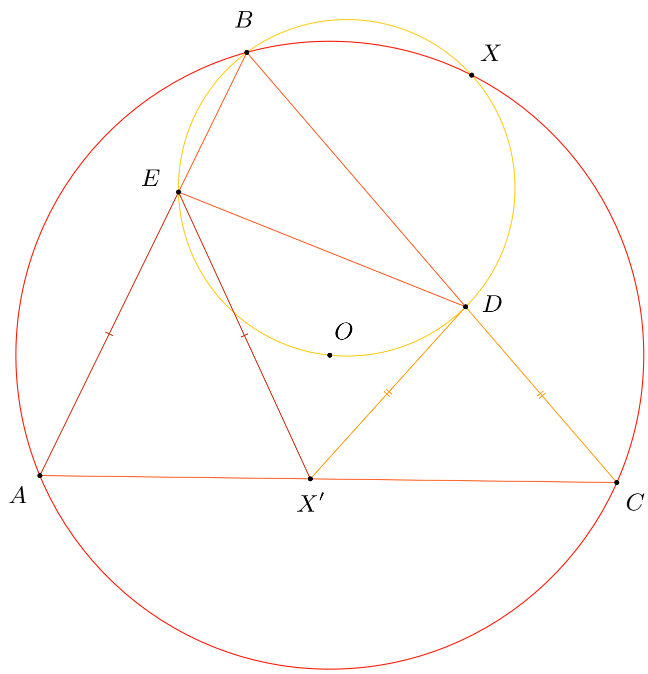


Доказательство: касательная в точке A антипараллельна BC относительно $\angle A$. Также H_BE антипараллельна BC относительно $\angle A$. Но H_BE – средняя линия $\triangle B'HC'$, то есть $H_BE \parallel B'C'$. Значит $TT_C \parallel B'C'$. Аналогично $TT_A \parallel B'A'$. Т.к. DE – средняя линия $\triangle A'HC'$, $DE \parallel C'A'$. Таким образом, соответствующие стороны $\triangle A'B'C'$ и $\triangle T_ATT_C$ параллельны $\Rightarrow$ такие треугольники гомотетичны. Центр гомотетии лежит на прямой, соединяющей соответствующие элементы треугольников. В $\triangle A'B'C'$ точка H – инцентр. Докажем, что середина стороны BC точка M – инцентр $\triangle T_ATT_C$. $\angle AET_C = \angle BED = \angle BCA = \angle BAT_C$, то есть $\triangle AT_CE$ – р/б. Так же $\triangle CT_AD$ – р/б. Поскольку $AM = ME$ и $CM = MD$, T_CM и T_AM – серперы к AE и CD соответственно. Но они же и биссектрисы углов $\angle AT_CE$ и $\angle CT_AD$. Значит M – инцентр $\triangle T_ATT_C$. Из свойства $H3$ – прямая TB', соединяющая соответствующие вершины гомотетичных $\triangle$, проходит через X. И прямая MH, соединяющая их инцентры проходит через $X \Rightarrow$ точка X и есть центр гомотетии. $\square$

Часть III. Конструкции, связанные с O

1. Squirrel lemma

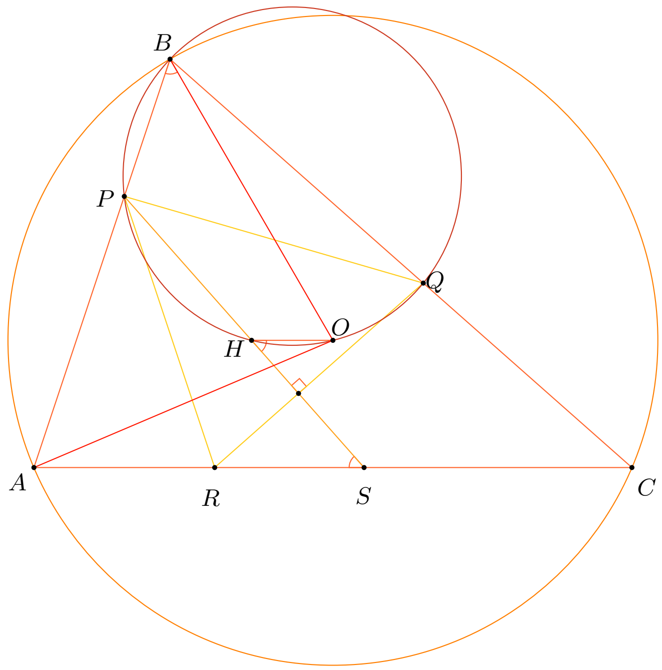
Белка в колесе. ω проходит через $O \Leftrightarrow$ точка X', симметричная X относительно DE лежит на AC, $AE = EX'$ и $CD = DX'$.



Доказательство: $\angle OAB = \angle OBE = \angle OXE$. Значит $\triangle OAE = \triangle OXE$ по 4 признаку равенства треугольников ($OA = OX$, OE – общая и X не лежит на AB). Аналогично, из равенства углов $\angle OCB = \angle OBD = \angle OXD$ и сторон $OC = OX$ (OD – общая) следует, что $\triangle OCD = \triangle OXD$. Таким образом, $X'E = XE = AE$ и $X'D = XD = CD$, то есть $\triangle AEX'$ и $\triangle CDX'$ – равнобедренные. Значит $\angle EX'A + \angle DX'C = \angle EAX' + \angle DCX' = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - \angle DXE = 180^\circ - \angle DX'E$ и точка X' лежит на AC. $\square$

Задача 3.1 (заочный тур XVIII олимпиады И.Ф.Шарыгина)

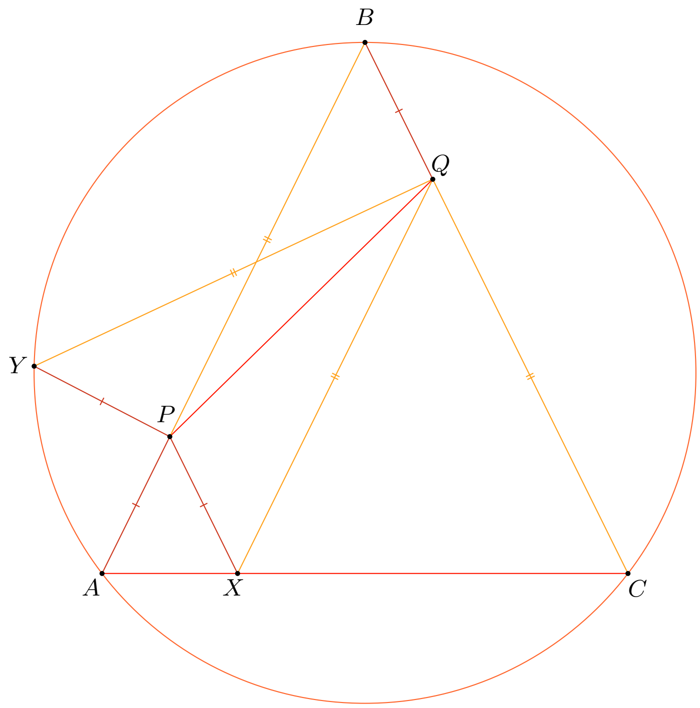
На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC выбраны точки P, Q, R соответственно так, что $AP = PR$, $CQ = QR$. Точка H – ортоцентр треугольника PQR, точка O – центр описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что $OH \parallel AC$.



Решение: по лемме о белке в колесе окружность, описанная около $\triangle PBQ$ проходит через O. $\angle PHQ = 180^\circ - \angle PRQ = 180^\circ - \angle ABC \Rightarrow \angle PHQ + \angle ABC = 180^\circ$. Значит точки P, B, Q, H, O лежат на одной окружности. Пусть $\angle OHS = \alpha$. Тогда $\angle ABO = \alpha$, $\angle ACB = \frac{\angle AOB}{2} = 90^\circ - \alpha = \angle CRQ$, $\angle HSR = 90^\circ - \angle CRQ = \alpha$. Значит $\angle OHS = \angle HSR$. Таким образом, прямые OH и AC параллельны, т.к. равны накрест лежащие углы $\angle OHS = \angle HSR$ при секущей HS. $\square$

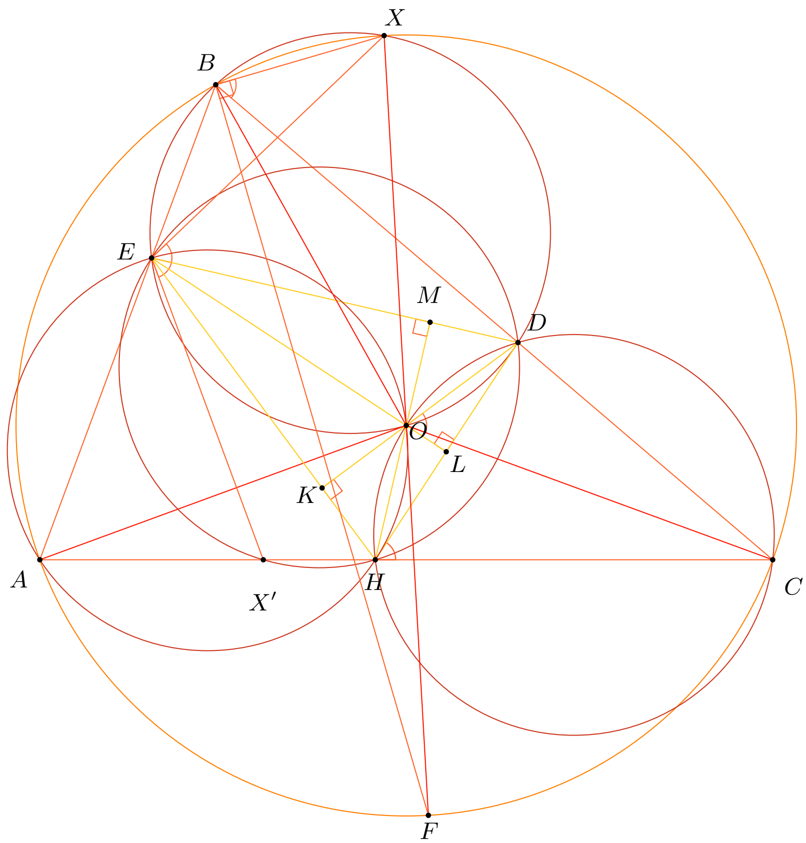
Задача 3.2 (ММО 2015, 11.3)

На основании AC равнобедренного треугольника ABC взяли произвольную точку X, а на боковых сторонах – точки P и Q так, что $XPBQ$ – параллелограмм. Докажите, что точка Y, симметричная точке X относительно PQ, лежит на описанной окружности треугольника ABC.



Решение: т.к. $XPBQ$ – параллелограмм, то $XP \parallel BC$, $XQ \parallel AB$. Значит $\triangle APX$ и $\triangle CQX$ равнобедренные и $AP = PX$, $CQ = QX$. По лемме о белке в колесе, точка Y, симметричная X относительно PQ лежит на описанной окружности $\triangle ABC$.

Свойство $O1$. Окружность, симметричная ω относительно DE пересекает AC второй раз в точке H, отличной от X' пересечения высот $\triangle DOE$.



Доказательство: $\angle COD = 180° - \angle ODC - \angle OCD = \angle BDO - \angle OCD = \angle BXO - \angle OBC = 90° - \angle BFX - (90° - \angle BAC) = \angle BAC - \angle BAX = \angle CAX$. $\angle CHD = \angle DEX' = \angle DEX = \angle DBX = \angle CBX = \angle CAX$. Таким образом, $\angle COD = \angle CHD$ и четырехугольник $CDOH$ – вписанный. Аналогично четырехугольник $AEOH$ – вписанный. Пусть DO пересекает EH в точке K и EO пересекает DH в точке L. Тогда $\angle OHK + \angle KOH = \angle OHE + \angle DOM = \angle OAE + \angle DCH = \angle OAB + \angle BCA$. По теореме об угле между радиусом и стороной $\angle OAB = 90° - \angle BCA$. Значит $\angle OHK + \angle KOH = 90° = \angle OKH = \angle DKH$. Аналогично $\angle ELH = 90°$. То есть $EH \perp DO$ и $DH \perp EO \Rightarrow$ точка H – ортоцентр $\triangle DOE$. □

Задача 3.3 (ВсОШ ЗЭ 2011, 9.2)

Дан остроугольный треугольник ABC. Окружность, проходящая через вершину B и центр O его описанной окружности, вторично пересекает стороны BC и BA в точках P и Q соответственно. Докажите, что точка пересечения высот треугольника POQ лежит на прямой AC.

Решение: д-во – следствие из свойства $O1$.

Задачи, в которых встречается окружность, проходящая через вершину и центр окружности, но решение не использует описанных свойств:

Задача 3.4 (Baltic Way-2022, N11).

Точка O – центр описанной окружности S треугольника ABC. Окружность C центром на AB, проходящая через точки A и O, повторно пересекает S в точке D. Окружность с центром на AC, проходящая через точки A и O, пересекает повторно S в точке E. Докажите, что прямые BD и CE параллельны.

2. BO – диаметр ω

Каких-либо общих свойств для конструкции, когда BO является диаметром ω не было найдено. Но задачи с такой конструкцией встречаются. Иногда полезно сделать гомотетию, переводящую ω в Ω, т.к. они касаются друг друга. Чаще требуется просто посчитать углы и заметить какие-нибудь свойства.

Задача 3.5 (XLI Турнир городов 8 – 9, сложный вариант)

Из центра O описанной окружности треугольника ABC опустили перпендикуляры OP и OQ на биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине B. Докажите, что прямая PQ делит пополам отрезок, соединяющий середины сторон CB и AB.

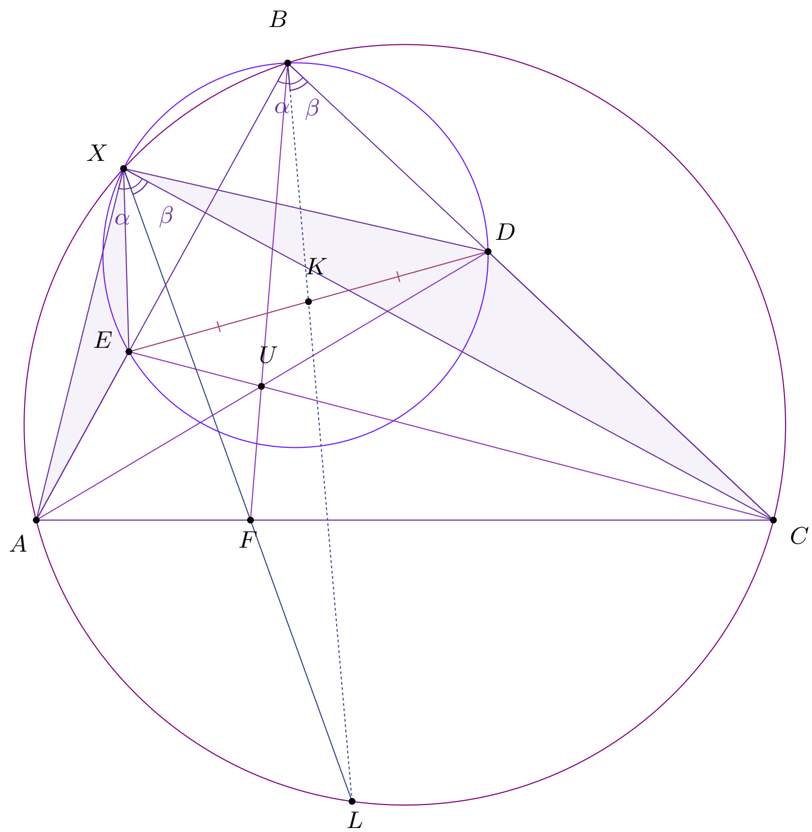
Задача 3.6 (XX Киевский матфестиваль, 9.3)

Пусть AD – высота, AE – медиана и O – центр описанной окружности треугольника ABC. Внутри треугольника выбрали точки X и Y так, что $\angle BAX = \angle CAY$, $OX \perp AX$ и $OY \perp AY$. Доказать, что точки D, E, X, Y лежат на одной окружности.

Часть IV. Конструкции, связанные с U

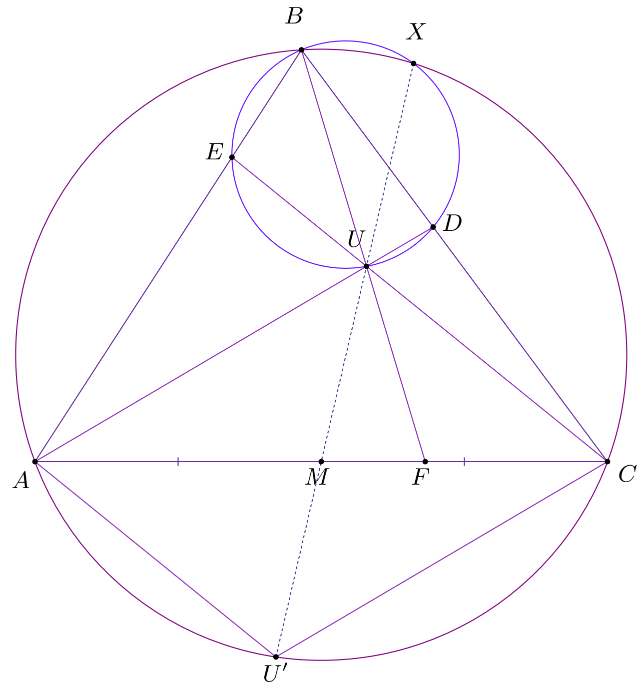
В $\triangle ABC$ чевианы AD, BF, CE пересекаются в точке U. Окружность ω, проходящая через точки B, D, E пересекает описанную окружность $\triangle ABC$ – Ω в точке X. Прямая XF второй раз пересекает Ω в точке L.

Свойство $U1$. Прямая BL проходит через середину DE.



Доказательство: пусть BL пересекает DE в точке K. Обозначим углы: $\angle EBK = \alpha$, $\angle KBD = \beta$. Тогда $\angle AXL = \angle AXF = \alpha$ и $\angle DXL = \angle DXF = \beta$. По лемме Однакова в $\triangle EBD$ верно равенство $\frac{sin\alpha}{sin\beta} = \frac{EK}{KD} \cdot \frac{DB}{BE}$, а в $\triangle AXC$ – $\frac{sin\alpha}{sin\beta} = \frac{AF}{FC} \cdot \frac{CX}{XA}$. По теореме Чевы в $\triangle ABC$, $\frac{AF}{FC} \cdot \frac{CD}{DB} \cdot \frac{BE}{EA} = 1$, то есть $\frac{AF}{FC} = \frac{DB}{CD} \cdot \frac{EA}{BE}$. Запишем равенство отношений синусов: $\frac{EK}{KD} \cdot \frac{DB}{BE} = \frac{AF}{FC} \cdot \frac{CX}{XA}$, заменим $\frac{AF}{FC}$ на $\frac{DB}{CD} \cdot \frac{EA}{BE}$ и сократим на $\frac{DB}{BE}$. Тогда $\frac{EK}{KD} = \frac{AE}{CD} \cdot \frac{XC}{AX}$. Из замечания $I4$ – $\frac{AE}{CD} = \frac{AX}{XC}$ $\Rightarrow \frac{AE}{CD} \cdot \frac{XC}{AX} = 1$ и $\frac{EK}{KD} = 1$, то есть K – середина DE. $\square$

Свойство $U2$. ω проходит через $U \Leftrightarrow UX$ проходит через середину AC.



Доказательство: пусть прямая UX пересекает Ω второй раз в точке U'. Тогда $\angle XU'C = \angle XBC = \angle XBD = \angle XUD = \angle U'UA \Rightarrow$ прямые $AU \parallel CU'$. Аналогично прямые $CU \parallel AU'$. Тогда $AUCU'$ – параллелограмм и его диагонали точкой пересечения M делятся пополам, т.е. M – середина AC. $\square$

Оба свойства конструкции взяты из статьи [7]. В ней можно прочитать про другой подход к доказательству этих свойств.

Заключение

Рассмотренные конструкции требуют детального изучения. Данная статья направлена на ознакомление читателя лишь с базовыми свойствами конструкций. Ссылки на статьи, в которых некоторым из рассмотренных конструкций уделено особое внимание, приведены в списке литературы.

В дальнейшем могут быть изучены случаи, когда ω проходит через другие известные точки треугольника, например через точку пересечения медиан. А также комбинации описанных конструкций, например, M-конфигурация треугольника [8].

Список литературы

1. Emelyanov L.A., Kozhevnikov P.A. ISOTOMIC SIMILARITY // Journal of Classical Geometry. - 2012. - C. 17-22.;
2. Полянский А. Воробьями по пушкам // Квант. - 2012. - №2. - С. 49-50.;
3. Воробьями по пушкам // polyanskii URL: http://polyanskii.com/wp-content/uploads/2017/06/sparrows.pdf;
4. The Sharky Devil Configuration // harmonyofmathematics URL: https://harmonyofmathematics.org/downloads/Sharky_Devil.pdf ;
5. Chen E. Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads. - WA: MAA Press, 2016. - 328 с.
6. Блинков Ю. Ортоцентр, середина стороны, точка пересечения касательных и ... еще одна точка! // Квант. - 2014. - №1. - С. 43-46.;
7. Dubrovsky V.N. TWO APPLICATIONS OF A LEMMA ON INTERSECTING CIRCLES // Journal of Classical Geometry. - 2012. - C. 62-64.;
8. Мякишев А.Г. M-конфигурация треугольника // Математическое образование. - 2003. - №4 (27). - С. 80-96.

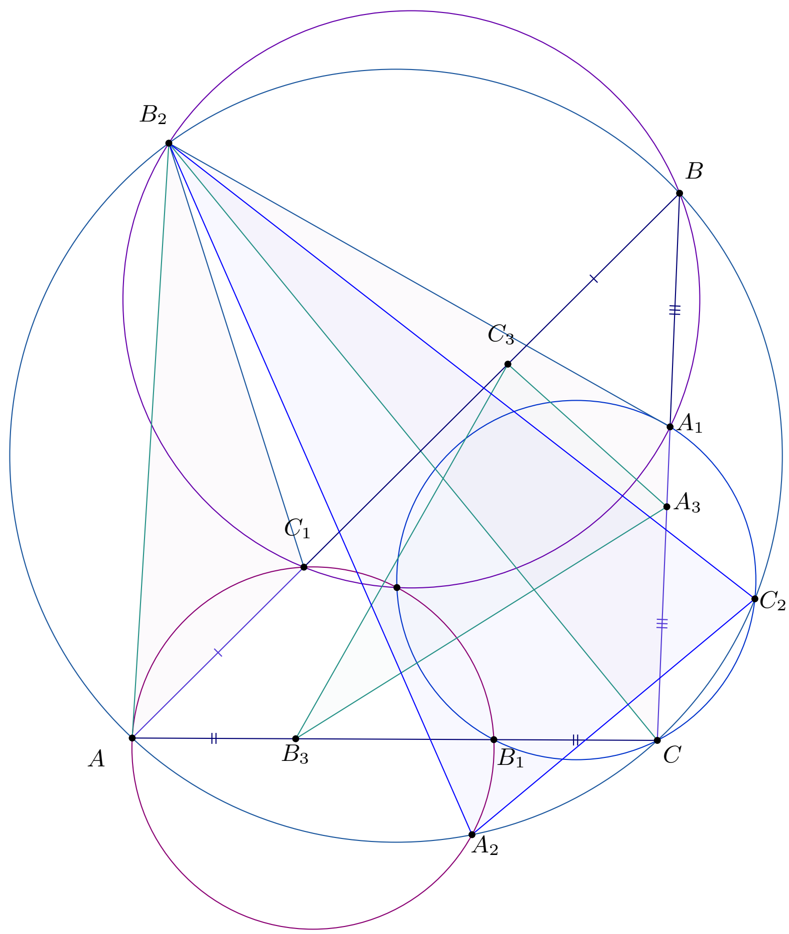
Благодарности

Автор благодарит Игоря Барышева за проявленный интерес к работе на этапе появления её идеи и Ирину Ланских за поддержку в момент творческого кризиса и не только.

Приложение 1

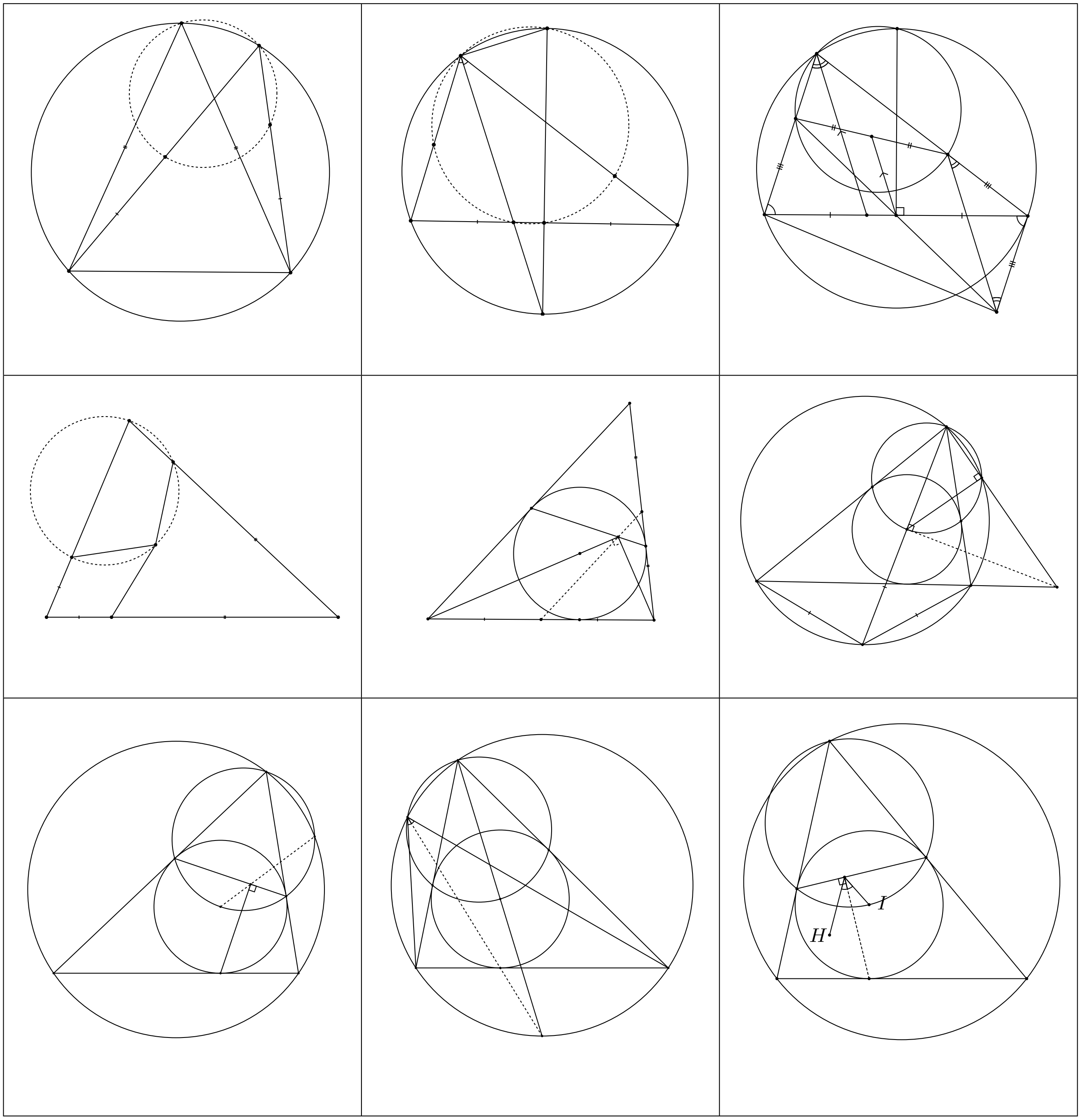
Подсказки к решению задачи 1.2

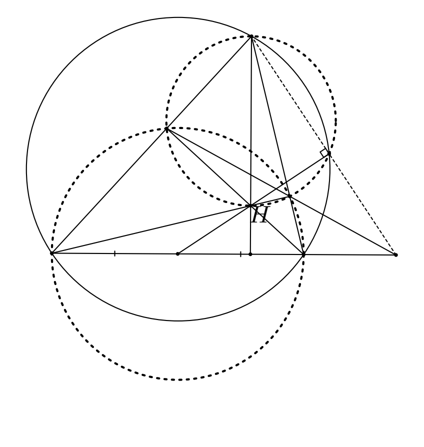
1. Доказать, что $\triangle AB_2C_1 \sim \triangle CB_2A_1$;
2. Доказать, что $\triangle C_3BA_3 \sim \triangle AB_2C$;
3. Посчитать углы.

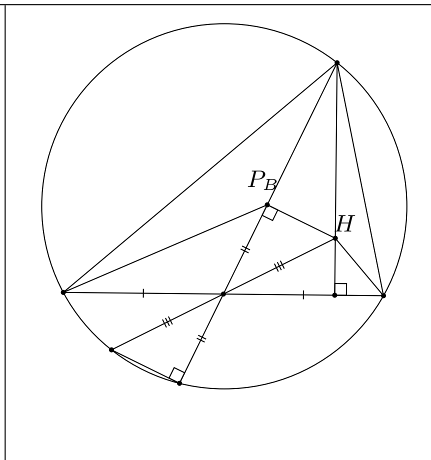


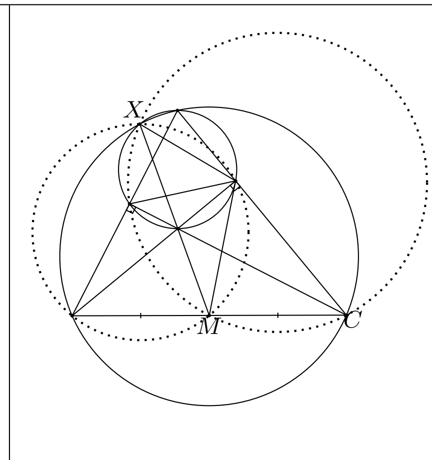
Приложение 2

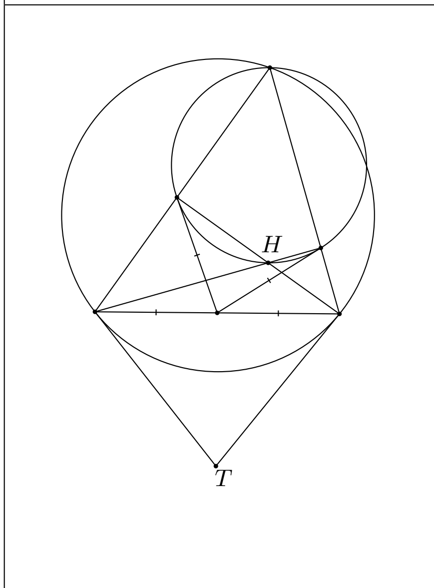
Подборка задач по теме статьи

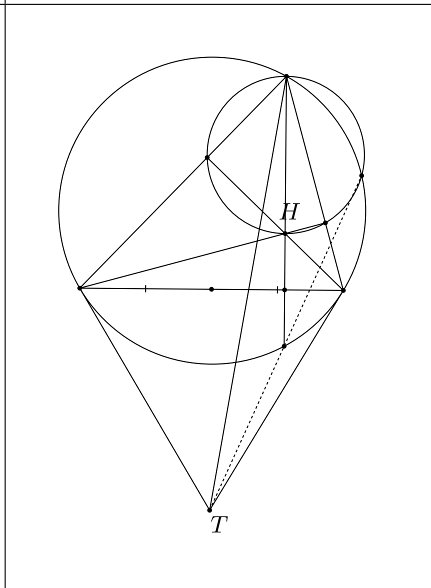


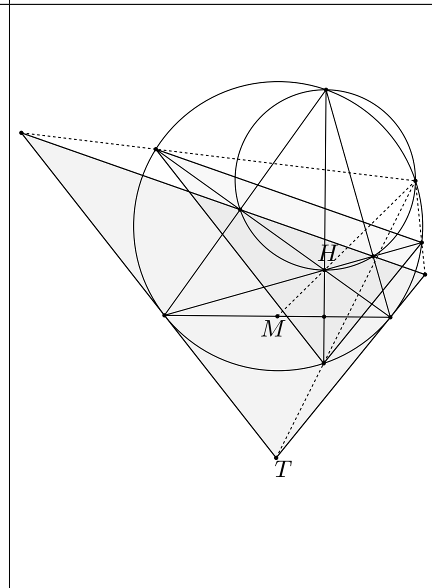

H

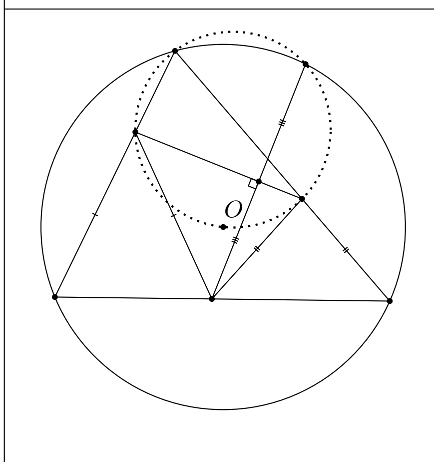

P_B
H

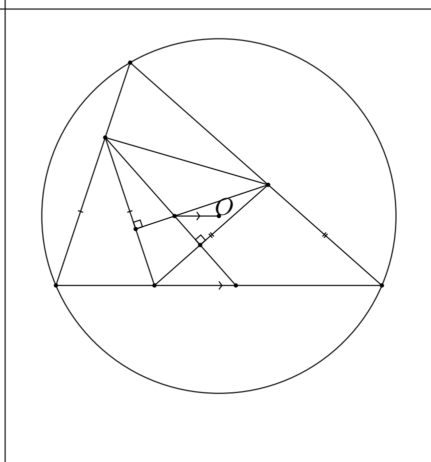

X
M
C

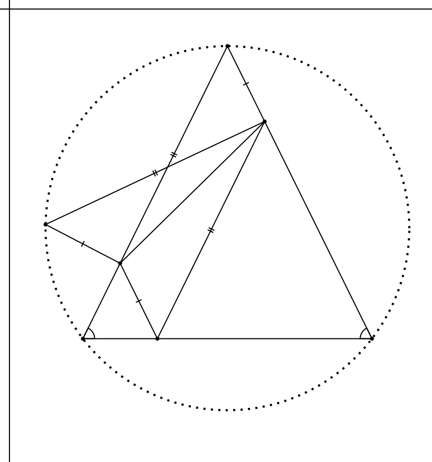

H
T

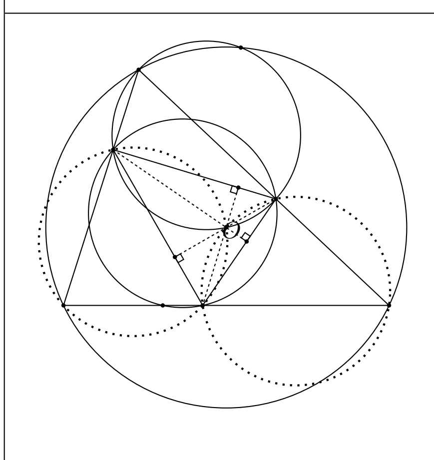

H
T

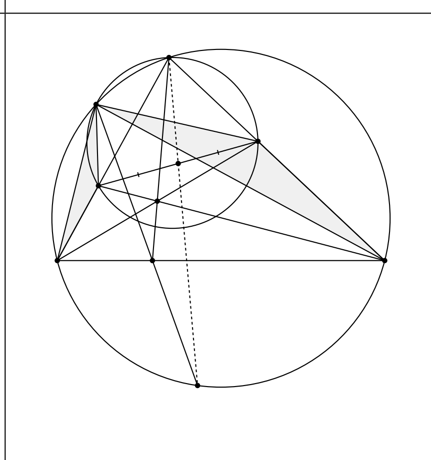

H
M
T

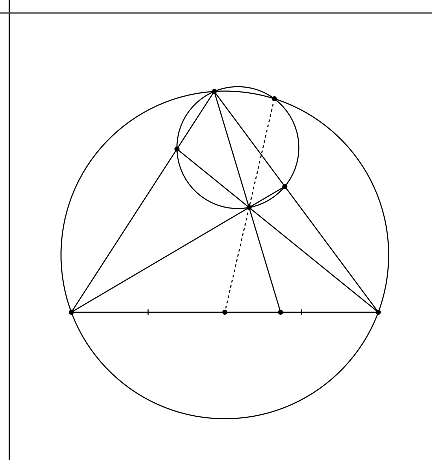

O


O




O





Приложение 3

Листок

1. **Первый воробей.** Задан неравнобедренный треугольник ABC, на его сторонах AB и BC выбраны точки C_0 и A_0 соответственно, B_1 – середина дуги ABC описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что равенство $AC_0 = CA_0$ выполняется тогда и только тогда, когда точки A_0, C_0, B_1, B лежат на одной окружности.

2. Пусть A_0, B_0 и C_0 – точки касания вневписанных окружностей с соответствующими сторонами треугольника ABC. Описанные окружности треугольников A_0B_0C, AB_0C_0 и A_0BC_0 пересекают второй раз описанную окружность Ω треугольника ABC в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику, образованному точками касания вписанной окружности $\triangle ABC$.

3. Точки A_1, B_1, C_1 лежат на сторонах BC, CA и AB $\triangle ABC$ соответственно. Описанные окружности треугольников AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C повторно пересекают описанную окружность $\triangle ABC$ в точках A_2, B_2, C_2 соответственно. Точки A_3, B_3, C_3 симметричны A_1, B_1, C_1 относительно середин соответствующих сторон. Докажите, что $\triangle A_2B_2C_2 \sim \triangle A_3B_3C_3$.

4. Дан треугольник ABC, в котором $AB \neq AC$. Пусть M – середина отрезка AB, K – середина дуги BAC описанной окружности треугольника ABC, а P – точка, в которой серединный перпендикуляр к AC пересекает биссектрису угла BAC. Докажите, что точки A, M, K, P лежат на одной окружности.

5. Докажите, что окружность, проходящая через середину дуги ABC, точку B и середину стороны AC – точку M пересекает второй раз AC в основании биссектрисы $\angle B$.

6. Окружность ω проходит проходит через середину дуги ABC – точку X и вершину B и пересекает стороны AB и BC в точках E и D соответственно. Точки M и N середины AC и DE соответственно. Докажите, что MN параллельна биссектрисе угла ABC.

7. Точки K, L на сторонах AC, CB треугольника ABC – это точки, в которых вневписанные окружности касаются сторон. Докажите, что прямая, соединяющая середины KL и AB,

а) делит периметр треугольника ABC пополам;

б) параллельна биссектрисе угла ACB.

8. В треугольнике ABC точка M – середина стороны BC, а точка D – пересечение внешней биссектрисы угла A с прямой BC. Описанная окружность треугольника ADM пересекает вторично сторону AC и продолжение стороны AB в точках E и F, соответственно. Точка N – середина EF. Докажите, что прямые AD и MN параллельны.

9. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает сторону BC и описанную окружность $\triangle ABC$ в точках D и L соответственно. Пусть M – середина стороны BC. Описанная окружность треугольника ADM пересекает стороны AB и AC второй раз в точках Q и P соответственно. Пусть N – середина PQ, H – основание перпендикуляра из L на ND. Докажите, что прямая ML касается описанной окружности треугольника HMN.

10. **Второй воробей.** Задан треугольник ABC, на его сторонах AB и BC выбраны точки C_0 и A_0 соответственно, I – центр вписанной окружности в ABC. Докажите, что окружность, описанная около треугольника A_0BC_0, проходит через I тогда и только тогда, когда $AC_0 + CA_0 = AC$.

11. **Задача №255.** Пусть K – точка пересечения биссектрисы угла A с прямой DE. Тогда $\angle AKC = 90°$ и K лежит на средней линии $ML \parallel AB$ треугольника ABC.

12. Дан треугольник ABC. На продолжении стороны BC за точку C выбирается точка X. Окружности, вписанные в треугольники ABX и ACX, пересекаются в точках P и Q. Докажите, что все прямые PQ проходят через некоторую точку, не зависящую от положения точки X.

13. Окружность, вписанная в $\triangle ABC$ имеет центр I и касается сторона AB и BC в точках D и E. Пусть ω – описанная окружность $\triangle IDE$, а X – точка пересечения ω и описанной окружности $\triangle ABC$ такая, что $X \neq B$. Докажите, что касательная в I к ω, BX и AC пересекаются в одной точке.

14. Пусть ω – описанная окружность треугольника ABC $(AB \neq AC)$, I – центр вписанной окружности, P – точка на ω, для которой $\angle API = 90°$, S – точка пересечения прямых AP и BC, W – точка пересечения прямой AI с ω. Прямая, проходящая через точку W перпендикулярно к AW, пересекает AP и BC в точках D и E соответственно. Доказать, что $SD = IE$.

15. **Sharkydevil.** Пусть точки D, E, F – точки касания вписанной в $\triangle ABC$ окружности со сторонами AB, BC и AC соответственно. Окружность, описанная около DBE пересекает описанную окружность $\triangle ABC$ в точке X. Пусть $Z = XI \cap DE$. Докажите, что $FZ \perp DE$.

16. Пусть вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон BC, CA и AB в точках D, E и F соответственно. Обозначим за ω, ω_1, ω_2, ω_3 окружности, описанные около треугольников ABC, AEF, BDF и CDE соответственно. Пусть ω и ω_1 пересекаются в A и P, ω и ω_2 пересекаются в B и Q, ω и ω_3 пересекаются в C и R. Докажите, что PD, QE и RF пересекаются в одной точке.

17. Вписанная в $\triangle ABC$ окружность касается сторон AB, BC и AC в точках D, E, F соответственно. Описанная около $\triangle DBE$ окружность пересекает описанную окружность $\triangle ABC$ в точке X. Докажите, что XF – биссектриса $\angle AXC$.

18. Точка I – центр вписанной окружности треугольника ABC. Пусть точка D – переменная точка на дуге AB окружности, описанной около треугольника ABC. Точка E на стороне BC такова, что $\angle ADI = \angle IEC$. Докажите, что когда D меняется, прямая DE проходит через фиксированную точку.

19. Пусть ABC – остроугольный треугольник, в котором $AB > BC$. Вписанная окружность $\triangle ABC$ касается его сторон в точках $D \in BC$, $E \in AB$, $F \in AC$. Перпендикуляр из точки F на DE пересекает BC в точке Y, и $X = (ABC) \cap (DBE)$. Докажите, что C, F, X, Y лежат на одной окружности.

20. В треугольник ABC ($AB > BC$) вписана окружность, касающаяся его сторон BC, CA и AB в точках D, E и F соответственно. Пусть ω – окружность, описанная около треугольника ABC. Точка M – середина отрезка AF, точка N – середина отрезка CD. Окружность, описанная около треугольника BMN, пересекает ω в точках B и K. Биссектриса угла ABC пересекает ω в точках B и L. Докажите, что точки K, E и L лежат на одной прямой.

21. Точки I и H – инцентр и ортоцентр $\triangle ABC$ соответственно. Вписанная окружность $\triangle ABC$ касается сторон BC, AB и AC в точках D, E и F соответственно. Точка Z – основание перпендикуляра из F на DE. Докажите, что $\angle FZH = \angle FZI$.

22. Дан $\triangle ABC$, H – его ортоцентр. Пусть X – точка пересечения окружности описанной около $\triangle ABC$ и окружности, построенной на BH как на диаметре ($X \neq B$). Прямая BX пересекает AC в точке Z, M – середина стороны AC. Докажите, что H – ортоцентр треугольника MBZ.

23. Внешняя биссектриса угла B треугольника ABC пересекает продолжение стороны AC в точке D. Пусть I – центр вписанной окружности, I_B – центр вневписанной окружности, касающейся стороны AC, а L – середина большей дуги AC описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что $DI \perp LI_B$.

24. **Точка Шалтая.** В $\triangle ABC$ отмечен его ортоцентр H и середина стороны AC – точка M. Пусть X – точка пересечения окружности описанной около $\triangle ABC$ и окружности, построенной на BH как на диаметре ($X \neq B$). Прямая BX пересекает AC в точке Z. Пусть $ZH \cap BM = P_B$. Докажите, что окружности ABP_B и CBP_B касаются стороны AC.

25. В треугольнике ABC проведены высоты AD и CE, пересекающиеся в точке H, M – середина стороны AC. Окружность (BDE) пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке X. Докажите, что:
a) Четырехугольники $AMDX$ и $CMEX$ – вписанные;
b) XM – биссектриса углов AXD и CXE.

26. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AP и BQ, а также медиана CM. Точка R – середина CM. Прямая PQ пересекает прямую AB в точке T. Докажите, что $OR \perp TC$, где O – центр описанной окружности треугольника ABC.

27. Касательные к описанной окружности $\triangle ABC$, проведенные в точках A и C, пересекаются в точке T. Пусть X – точка пересечения окружностей (ABC) и ω, построенной на BH как на диаметре ($X \neq B$). Докажите, что ортоцентр, отраженный относительно AC, точки T, X лежат на одной прямой.

28. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Пусть ω – его описанная окружность, точка M – середина стороны BC, P – вторая точка пересечения описанной окружности треугольника AB_1C_1 и ω, T – точка пересечения касательных к ω, проведенных в точках B и C, S – точка пересечения AT и ω. Докажите, что P, A_1, S и середина отрезка MT лежат на одной прямой.

29. Касательные, проведённые к описанной окружности остроугольного треугольника ABC в точках A и C, пересекаются в точке Z. AA_1, CC_1 – высоты. Прямая A_1C_1 пересекает прямые ZA, ZC в точках X и Y соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников ABC и XYZ касаются.

30. **Белка в колесе.** В $\triangle ABC$ окружность ω проходит через вершину B и центр описанной окружности O и пересекает окружность (ABC) в точке X. Пусть $D = AB \cap \omega$, $E = BC \cap \omega$. Докажите, что точка X', симметричная X относительно DE лежит на AC, $AE = EX'$ и $CD = DX'$.

31. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC выбраны точки P, Q, R соответственно так, что $AP = PR$, $CQ = QR$. Точка H – ортоцентр треугольника PQR, точка O – центр описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что $OH \parallel AC$.

32. На основании AC равнобедренного треугольника ABC взяли произвольную точку X, а на боковых сторонах – точки P и Q так, что $XPBQ$ – параллелограмм. Докажите, что точка Y, симметричная точке X относительно PQ, лежит на описанной окружности треугольника ABC.

33. Дан остроугольный треугольник ABC. Окружность, проходящая через вершину B и центр O его описанной окружности, вторично пересекает стороны BC и BA в точках P и Q соответственно. Докажите, что точка пересечения высот треугольника POQ лежит на прямой AC.

34. Точка O – центр описанной окружности S треугольника ABC. Окружность C центром на AB, проходящая через точки A и O, повторно пересекает S в точке D. Окружность с центром на AC, проходящая через точки A и O, пересекает повторно S в точке E. Докажите, что прямые BD и CE параллельны.

35. Из центра O описанной окружности треугольника ABC опустили перпендикуляры OP и OQ на биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине B. Докажите, что прямая PQ делит пополам отрезок, соединяющий середины сторон CB и AB.

36. Пусть AD – высота, AE – медиана и O – центр описанной окружности треугольника ABC. Внутри треугольника выбрали точки X и Y так, что $\angle BAX = \angle CAY$, $OX \perp AX$ и $OY \perp AY$. Доказать, что точки D, E, X, Y лежат на одной окружности.

37. В $\triangle ABC$ чевианы AD, BF, CE пересекаются в точке U. Окружность ω, проходящая через точки B, D, E пересекает описанную окружность $\triangle ABC$ – Ω в точке X. Прямая XF второй раз пересекает Ω в точке L. Докажите, что прямая BL проходит через середину DE.

38. В $\triangle ABC$ чевианы AD, BF, CE пересекаются в точке U. Окружность ω, проходящая через точки B, D, E пересекает описанную окружность $\triangle ABC$ – Ω в точке X. Прямая XF второй раз пересекает Ω в точке L. Докажите, что ω проходит через $U \Leftrightarrow UX$ проходит через середину AC.