

# Об одной замечательной прямой в треугольнике

А.КАРЛЮЧЕНКО, Г.ФИЛИППОВСКИЙ

П УСТЬ ДАН ТРЕУГОЛЬНИК  $ABC$  (РИС.1),  $I$  – ЕГО ИНЦЕНТР, т.е. центр вписанной окружности,  $K_1, K_2, K_3$  – точки касания вписанной окружности со сторонами,  $M_1$  – середина стороны  $BC$ ,  $AH_1$  – высота, проведенная из вершины  $A$ . Оказывается, что прямая  $M_1I$  (и еще две аналогичные прямые, соединяющие середины двух других сторон с инцентром) обладает целым рядом свойств, помогающих решать большое количество задач. Об этих свойствах и их применениях мы и поговорим.

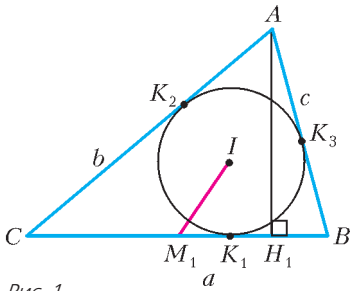


Рис. 1

### Свойства прямой $M_1I$

**Свойство 1.** Прямые  $M_1I$  и  $AT_1$ , где  $T_1$  – точка касания невписанной окружности треугольника  $ABC$  со стороной  $BC$ , параллельны.

**Доказательство.** Пусть  $K_1D$  – диаметр вписанной в  $\triangle ABC$  окружности (рис.2). Касательная  $EF$  к этой окружности в точке  $D$  будет, очевидно, параллельна стороне  $BC$ .

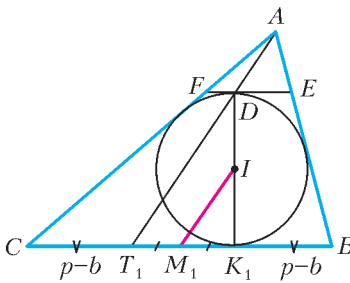


Рис. 2

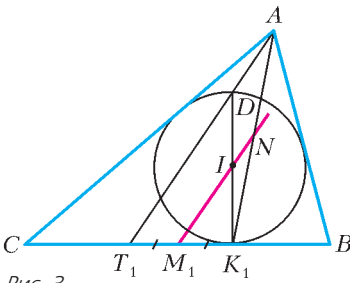


Рис. 3

Точка  $D$  является точкой касания невписанной окружности треугольника  $AEF$  со стороной  $EF$ . В свою очередь,  $T_1$  – точка касания невписанной окружности треугольника  $ABC$  со стороной  $BC$ . Треугольники  $AEF$  и  $ABC$  гомотетичны с центром гомотетии в точке  $A$ . Поэтому  $A, D$  и  $T_1$  лежат на одной прямой. Кроме того,  $BK_1 = CT_1 = p - b$ , где  $p$  – полупериметр треугольника (докажите это!). Следовательно,  $T_1M_1 = M_1K_1$  и  $M_1I$  – средняя линия в  $\triangle DK_1T_1$ . А это и значит, что  $M_1I \parallel AT_1$ .

**Свойство 2.** Прямая  $M_1I$  делит отрезок  $AK_1$  пополам.

**Доказательство.** Пусть прямая  $M_1I$  пересекает  $AK_1$  в точке  $N$  (рис.3). Поскольку  $M_1I \parallel AT_1$  и  $T_1M_1 = M_1K_1$ , то  $M_1N$  – средняя линия в  $\triangle AK_1T_1$ . Таким образом,  $AN = NK_1$ .

Заметим, что свойство 2 может быть элегантно доказано с помощью **теоремы Ньютона**: если в четырехугольник вписана окружность, то ее центр расположен на прямой, соединяющей середины диагоналей четырехугольника.

Действительно,  $\triangle ABC$  можно рассматривать как вырожденный четырехугольник  $ABK_1C$  ( $\angle BK_1C = 180^\circ$ ). Тогда, согласно теореме Ньютона, точки  $M_1$  и  $N$  (середины диагоналей), а также центр окружности  $I$  лежат на одной прямой.

**Свойство 3** Прямая  $M_1I$  отсекает от высоты  $AH_1$  отрезок  $AQ$ , равный радиусу вписанной в  $\triangle ABC$  окружности.

**Доказательство.** Поскольку  $ADIQ$  – параллелограмм (его противоположные стороны параллельны), то  $AQ = DI = r$  (рис.4).

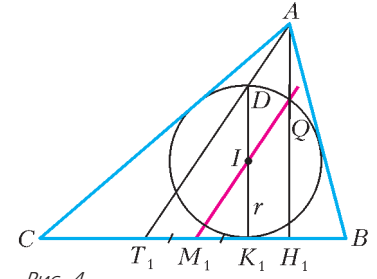


Рис. 4

Свойства 2 и 3 предлагались в качестве задач на II и III Всесоюзной математической олимпиаде соответственно.

Далее мы покажем, как «работают» свойства 1 – 3 прямой  $M_1I$ .

### Задачи на доказательство

**Задача 1.** Пусть  $M$  – центроид, т.е. точка пересечения медиан, треугольника  $ABC$ . Докажите, что  $M_1I$  делит отрезок  $MK_1$  в отношении 1:3, считая от центроида  $M$ .

**Решение.** Поскольку  $T_1M_1 = M_1K_1$  и  $AM : MM_1 = 2 : 1$ , то точка  $M$  – центроид в  $\triangle AK_1T_1$  (рис.5). А значит,  $K_1M : MG = 2 : 1$ . Вместе с тем,  $M_1I \parallel AT_1$  (свойство 1) и  $K_1L = LG$ . Теперь нетрудно подсчитать, что  $ML : LK_1 = 1 : 3$ .

**Задача 2.** Пусть  $M_2, M_3$  – середины сторон  $AC$  и  $BA$  соответственно. Докажите, что прямая  $M_1I$  делит периметр  $\triangle M_1M_2M_3$  пополам.

**Решение.** Прямая  $AT_1$  делит периметр  $\triangle ABC$  пополам. Действительно,  $AC + CT_1 = b + p - b = p$  и  $M_1I \parallel AT_1$  (рис.6). Тогда  $AT_1$  и  $M_1I$  – соответственные прямые в гомотетичных треугольниках  $ABC$  и  $M_1M_2M_3$ .

**Задача 3.** Докажите, что прямые  $M_1I$ ,  $T_1M$  и  $AK_1$  пересекаются в одной точке.

**Решение.** Решая задачу 1, мы показали, что точка  $M$  является центроидом в треугольнике  $\triangle AK_1T_1$ , а значит, точки  $T_1, M$  и  $N$  лежат на одной прямой (см. рис.5). По свойству 2 точки  $M_1, I, N$  лежат на одной пря-

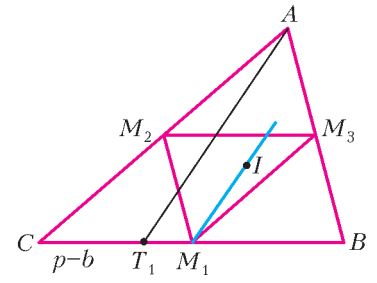


Рис. 5

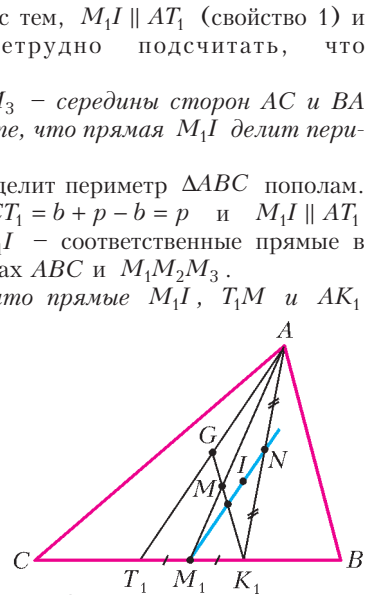


Рис. 6

(Продолжение см. на с.34)

(Начало см. на с.31)

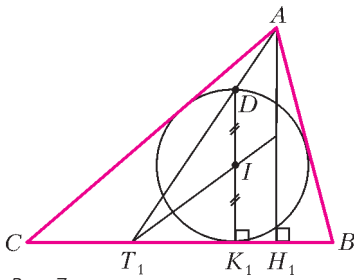


Рис. 7

мой. Таким образом, прямые  $M_1I$  и  $T_1M$  пересекаются в середине отрезка  $AK_1$ .

**Задача 4.** Докажите, что  $T_1I$  делит высоту  $AH_1$  пополам.

**Решение.** Прямая  $T_1I$  делит  $DK_1$  пополам ( $DI = IK_1 = r$ ; рис.7). Поскольку  $DK_1 \parallel AH_1$ , то прямая  $T_1I$  разделит пополам и высоту  $AH_1$ .

**Задачи на построение**

**Задача 5.** Постройте треугольник  $ABC$  по трем точкам: вершине  $A$ , инцентру  $I$  и центроиду  $M$ .

**Решение.** Соединим точки  $A$  и  $M$ , продлим  $AM$  на половину этого отрезка и получим  $M_1$  – середину  $BC$  (рис.8).

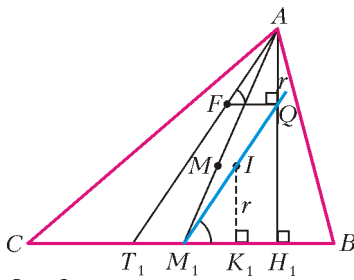


Рис. 8

Проведем прямую  $M_1I$ . Согласно ее свойствам,  $M_1I \parallel AT_1$  и  $M_1I$  отсекает от высоты  $AH_1$  отрезок  $AQ = r$ . Анализ показывает, что если провести через точку  $Q$  прямую параллельно  $BC$  – до пересечения с  $AT_1$  в точке  $F$ , то  $\Delta AQF = \Delta IK_1M_1$  (по катету и острому углу).

Отсюда и построение: через вершину  $A$  проведем прямую параллельно прямой  $M_1I$ . Отложим на ней отрезок  $AF = M_1I$ . Окружность, построенная на  $AF$  как на диаметре, пересечет прямую  $M_1I$  в точке  $Q$ . При этом  $AQ \perp BC$ . Дальнейшее построение очевидно.

**Задача 6.** Восстановите треугольник  $ABC$  по инцентру  $I$ , точке  $M_1$  – середине  $BC$ , а также прямой  $l$ , содержащей высоту  $AH_1$ .

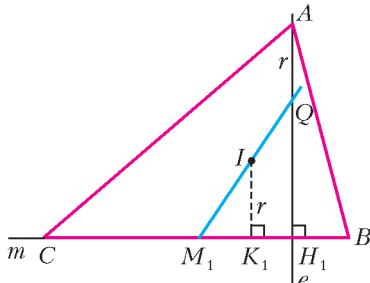


Рис. 9

**Решение.** Проведем через  $M_1$  прямую  $m$ , перпендикулярную  $l$ , перпендикуляр из точки  $I$  на эту прямую даст точку  $K_1$  и отрезок  $IK_1 = r$  (рис.9). Пусть  $M_1I$  пересечет  $l$  в точке  $Q$ . Отложив от точки  $Q$  вверх отрезок, равный  $r$ , получим вершину  $A$ . Касательные из точки  $A$  к окружности с центром  $I$  радиуса  $IK_1 = r$  пересекут прямую  $m$  в недостающих вершинах  $B$  и  $C$ .

**Задача 7.** Постройте треугольник  $ABC$  по высоте и медиане, проведенным из вершины  $A$ , и радиусу  $r$  вписанной окружности.

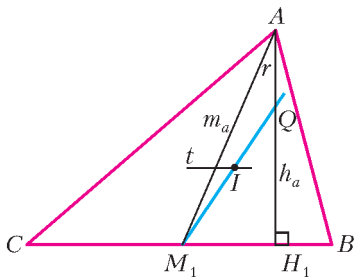


Рис. 10

**Решение.** Строим прямоугольный  $\Delta AH_1M_1$  по катету  $h_a$  и гипотенузе  $m_a$  (рис.10). Откладываем от  $A$  отрезок  $AQ = r$ . Прямая  $t$ , проведенная параллельно

но  $H_1M_1$  на расстоянии  $r$  от нее, пересечет  $M_1Q$  в инцентре  $I$ . Дальнейшее очевидно.

но  $H_1M_1$  на расстоянии  $r$  от нее, пересечет  $M_1Q$  в инцентре  $I$ . Дальнейшее очевидно.

**Задача 8.** Восстановите  $\Delta ABC$  по точкам  $M$ ,  $I$  и прямой  $t$ , содержащей сторону  $BC$ .

**Решение.** Из точки  $I$  проведем перпендикуляр  $IK_1$  к прямой  $t$ , причем  $IK_1 = r$  (рис.11). Соединим  $M$  и  $K_1$  и, разделив этот отрезок в отношении 1:3, получим точку  $L$  (задача 1). Прямая  $IL$  пересечет  $t$  в точке  $M_1$  – середине  $BC$ . Удвоим отрезок  $M_1M$ , получим вершину  $A$ . Касательные из  $A$  к окружности с центром  $I$  радиуса  $r$  пересекут  $t$  в вершинах  $B$  и  $C$ .

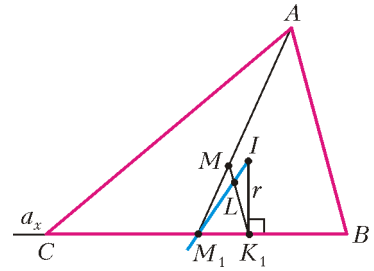


Рис. 11

**Задачи про треугольник, в котором  $b + c = 2a$**

Иногда, в связи с тем что  $b - a = a - c$ , такой треугольник называют *разностным*. А вообще это треугольник, у которого одна из сторон равна среднему арифметическому двух других сторон.

**Задача 9.** Дан  $\Delta ABC$ , в котором  $b + c = 2a$ . Докажите, что в нем  $QH_1 = 2r$ .

**Решение.** Поскольку  $M_1I$  отсекает от высоты  $h_a$  отрезок  $AQ = r$  (рис. 12), то

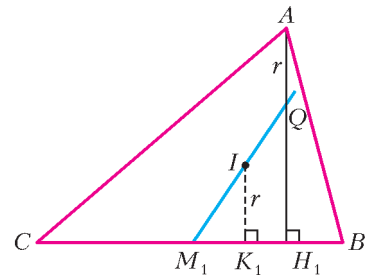


Рис. 12

$$\frac{QH_1}{QA} = \frac{h_a - r}{r} = \frac{h_a}{r} - 1 = \frac{2S/a}{S/p} - 1 = \frac{2p - a}{a} = \frac{b + c}{a} = \frac{2a}{a} = 2,$$

где  $S$  – площадь треугольника  $ABC$ . Значит,  $QH_1 = 2r$ .

**Следствие.** В разностном треугольнике  $h_a = 3r$ .

**Задача 10.** Докажите, что в разностном треугольнике  $M_1K_1 = K_1H_1$ .

**Решение.** Поскольку  $QH_1 = 2r$ , а  $IK_1 = r$  и к тому же  $IK_1 \parallel QH_1$ , то  $IK_1$  является средней линией в  $\Delta QH_1M_1$  (см. рис.12), т.е.  $M_1I = IQ$  и  $M_1K_1 = K_1H_1$ .

**Задача 11.** В разностном треугольнике  $MI \parallel BC$ . Докажите это.

**Решение.** Это очевидно, поскольку расстояния от центра  $I$  до стороны  $BC$  составляют  $\frac{1}{3}h_a = r$ .

**Следствие.** В разностном треугольнике прямые  $M_1I$  и  $MI$  делят высоту  $h_a$  на 3 равные части.

**Задача 12.** Инцентр  $I$  разностного треугольника  $ABC$  является центроидом треугольника  $AT_1H_1$ . Докажите это.

**Решение.** Поскольку  $M_1I = IQ$  (задача 10), то медиана  $H_1G$  треугольника  $AT_1H_1$  проходит через точку  $I$  (рис.13). Но тогда из параллельности прямых  $M_1I$  и  $AT_1$ , а также из равенства  $T_1M_1 = M_1K_1 = K_1H_1$  следует  $H_1I = 2IG$ . А это значит, что  $I$  – центроид  $\Delta AT_1H_1$ .

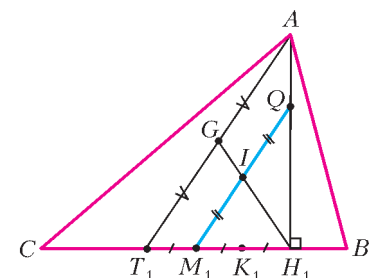


Рис. 13

**Задачи с прямоугольным треугольником**

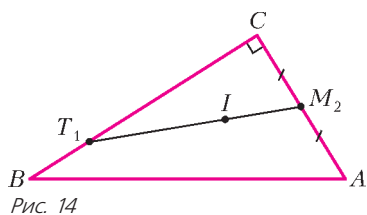


Рис. 14

пополам (задача 4), а в прямоугольном треугольнике катет AC совпадает с  $h_a$ , то задача решена.

**Задача 13.** Докажите, что в прямоугольном  $\triangle ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ) точки  $T_1, I, M_2$  принадлежат одной прямой (рис.14).

**Решение.** Так как прямая  $T_1I$  делит высоту  $h_a$

**Задача 14.** Дан прямоугольный  $\triangle ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ) с заданными положениями центра  $M$  и инцентра  $I$ . При помощи одной линейки разделите периметр этого треугольника пополам.

**Решение.** Прямая  $AM$  пересечет  $BC$  в точке  $M_1$  (рис.15). Прямая  $M_1I$  пересечет  $AC$  в точке  $Q$  такой, что  $AQ = r$  (свойство 3). Прямая  $BQ$  разделит периметр  $\triangle ABC$  пополам, ибо

$$c + r = c + \frac{a + b - c}{2} = \frac{a + b + c}{2} = p.$$

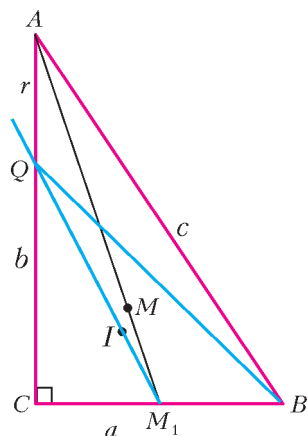


Рис. 15

**Задача 15.** В прямоугольном  $\triangle ABC$  через середину гипотенузы  $BC$  и инцентр  $I$  проведена прямая. Она пересекает катет  $AB$  под углом  $75^\circ$ .

Найдите острые углы  $\triangle ABC$ .

**Решение.** Пусть прямая  $M_1I$  пересекает  $AH_1$  в точке  $Q$  и  $AB$  – в точке  $F$  (рис.16). Тогда, согласно условию,  $\angle BFM_1 = 75^\circ$ , а  $AQ = r$  (свойство 3). Кроме того,  $AI = r\sqrt{2}$  и  $\angle AIF = 30^\circ$

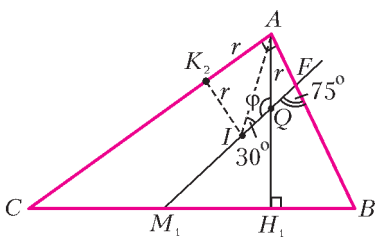


Рис. 16

(так как  $\angle BFM_1 = 75^\circ$  – внешний для  $\triangle AIF$ ).

Пусть  $\angle AQI = \varphi$ . По теореме синусов для  $\triangle AQI$  имеем

$$\frac{AI}{\sin \varphi} = \frac{AQ}{\sin 30^\circ}, \text{ или } \frac{r\sqrt{2}}{\sin \varphi} = \frac{r}{1/2},$$

откуда

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ и } \varphi = 135^\circ.$$

Из четырехугольника  $BFQH_1$  найдем угол  $B$ :

$$\angle B = 360^\circ - 90^\circ - 135^\circ - 75^\circ = 60^\circ.$$

Тогда  $\angle C = 30^\circ$ .

**Задачи, связанные с вневписанной окружностью**

Заметим, что свойства, аналогичные вышеуказанным, можно наблюдать и при рассмотрении вневписанных окружностей треугольника  $ABC$ .

Пусть  $I_a$  – центр вневписанной окружности  $\omega$ , касающейся стороны  $BC$ , касающейся стороны  $AB$  и продолжений  $BC$  и  $AB$  (рис.17). Вот несколько фактов, которые мы предлагаем вам доказать самостоятельно:

- а)  $I_aK_1$  делит  $h_a$  пополам;
- б)  $I_aM_1$  отсекает на продолжении  $h_a$  за точку  $A$  отрезок  $AU$ , равный радиусу окружности  $\omega$ ;
- в)  $I_aM_1 \parallel AK_1$ ;
- г)  $I_aM_1$  делит отрезок  $AT_1$  пополам.

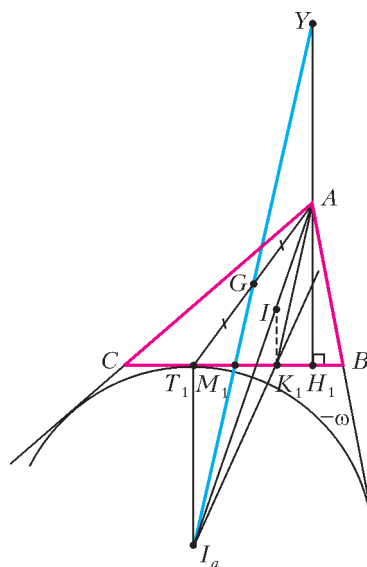


Рис. 17

# Квантовые чудеса

**М.КАГАНОВ**

**Введение**

В статье «Как квантовая механика описывает микромир» (см. «Квант» №2, 3 за 2006 г.) рассказывалось о фундаментальном уравнении квантовой механики – уравнении Шрёдингера – и с его помощью рассматривалась задача поведения частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме. В предлагаемой вниманию читателей публикации главное вни-

мание будет уделено решению нескольких сравнительно простых задач, которые подобраны так, чтобы продемонстрировать необычность поведения микрочастиц по сравнению с макроскопическими телами. Из соображений простоты мы ограничимся только одномерными задачами.

Предлагаемые задачи, как правило, не могут претендовать на описание какого-то реального физического явления. Но они могут помочь понять реальные явления, достойные называться квантовыми чудесами.

**Частица или волна? Одна или много?**

Наибольшей психологической трудностью квантовой механики считается непредставимость основного объекта, для описания движения которого она создана. То частица проявляет свои волновые свойства, то корпускулярные. Математический аппарат квантовой механики устроен так, что, решая любую физическую задачу, можно пользоваться об-