

КВАДРАТИК



Такая геометрия – с одной стороны, необычная, а с другой – вполне обыкновенная. Необычная – потому, что все фигуры будут изображаться на «клеточках», а обычная – потому, что для рассуждений потребуется воображение и знание основных фактов школьного курса геометрии (как правило, на уровне 7 класса).

Предлагаемые задачи по большей части выбраны из различных олимпиад и придуманы серьёзными авторами. Несколько задач взяты из книжки «Задачи на вырост» замечательного математика Вячеслава Викторовича Произволова. Всё это говорит о том, что геометрические задачи на клетчатой бумаге достойны отдельного разговора!

Начнём с задач на построение. На клетчатой бумаге для их решения обычно хватает одного инструмента – линейки, причем без делений, так как при построениях мы можем использовать «узлы» квадратной сетки.

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ФАКТЫ

Факт 1. Угол на рисунке 1 равен 90° .

Доказательство. Заметим, что AB и AC – диагонали равных прямоугольников размера 1×4 клетки. Повернём прямоугольник с диагональю AB вокруг точки A на 90° против часовой стрелки. Он, очевидно, перейдёт в прямоугольник с диагональю AC , которая совместится с диагональю AB . Значит, до поворота угол между этими диагоналями был 90° .

Подобный факт останется верным, если вместо прямоугольников 1×4 взять равные прямоугольники любых размеров.

Факт 2. AD – биссектриса угла BAC на рисунке 2.

Доказательство. Заметим, что отрезки AD и CB перпендикулярны (они проходят через диагонали клетки с вершиной в точке D), причём их точка пересечения делит отрезок CB пополам (на два отрезка длиной в полторы диагонали клетки). Значит, если перегнуть лист бумаги по отрезку AD , то точки B и C совместятся (говорят, что точки B и C симметричны относительно прямой AD). Ясно, что и углы BAD и CAD при этом совместятся, то есть они равны, и AD – биссектриса угла BAC .

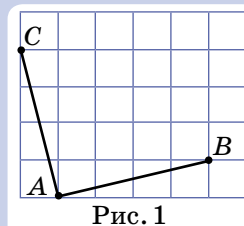


Рис. 1

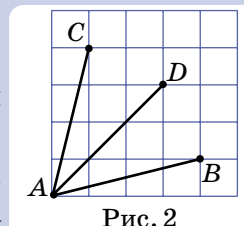


Рис. 2

Задача 1 (В. Смирнов). Используя только линейку без делений, постройте центр окружности, вписанной в треугольник ABC (рис. 3а).

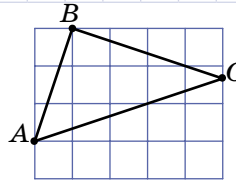


Рис. 3а

Напомним, что центр окружности, вписанной в треугольник, лежит на пересечении его биссектрис.

Решение. Для построения центра вписанной окружности достаточно построить биссектрисы двух углов треугольника. Совсем несложно построить биссектрису угла A : отметим узел K и соединим его отрезком с вершиной A . Аналогично доказательству факта 2, точки B и D симметричны относительно AK , и поэтому луч AK является биссектрисой угла BAD (рис. 3б).

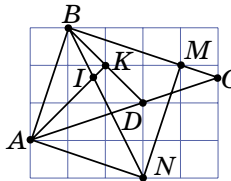


Рис. 3б

Чтобы использовать похожую идею ещё раз, заметим, что угол ABC — прямой. Тогда отметим на стороне BC точку M так, чтобы отрезки BM и BA были равны, после чего, используя также узел N , построим квадрат $ABMN$. Его диагональ BN будет биссектрисой угла B .

Точка I пересечения отрезков AK и BN — искомая.

Узлы на сетке позволяют в некоторых случаях обойтись вообще без инструментов.

Задача 2 (А. Блинков). Отметьте на чертеже (рис. 4а) точку, симметричную точке C относительно прямой AB . Ответ обоснуйте.

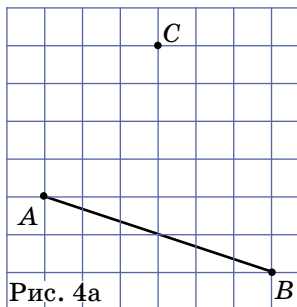


Рис. 4а

Найти искомую точку, скорее всего, несложно, но ведь надо ещё обосновать...

Ответ: точка D (рис. 4б, в).

Решение. Напомним, что точка D будет симметрична точке C относительно AB , если прямая AB — серединный перпендикуляр к отрезку CD . Чтобы это доказать, соединим точки C и D

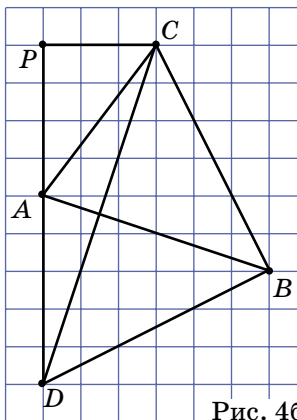
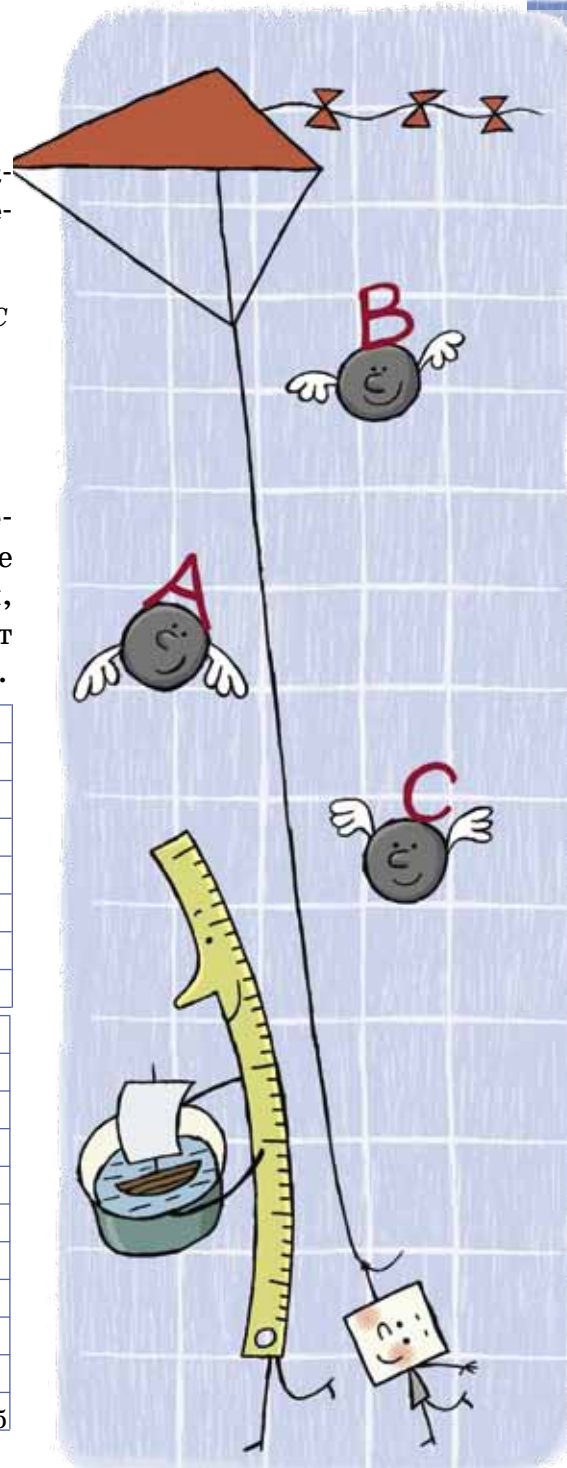


Рис. 4б



с концами отрезка AB (рис. 4б). Заметим, что $AC = 5$ (по теореме Пифагора для треугольника ACP). Следовательно, треугольники ABC и ABD равны (по трём сторонам), поэтому равны углы CAB и DAB .

Таким образом, биссектриса треугольника CAD , проведённая из вершины A , является его высотой и медианой, значит, AB – серединный перпендикуляр к отрезку CD .

Те из вас, кто ещё не знаком с теоремой Пифагора, могут решить задачу по-другому, построив три вспомогательных квадрата на рис. 4в.

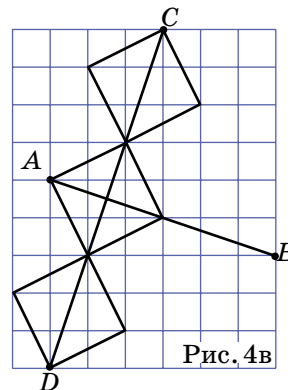


Рис. 4в

Обратите внимание, что задача 2 на самом деле не задача на построение, а задача «на доказательство». И таких задач «на клеточках» также немало.

Задача 3 (В.Произволов). Не выходя за пределы листа размера 3×3 , докажите равенство красного и зелёного углов (рис. 5а).

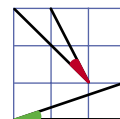


Рис. 5а

Понятно, что равные углы наверняка найдутся в равных треугольниках, но таких здесь не видно. Но если нет равных треугольников, то, может быть, найдутся хотя бы подобные?

Решение. Построим два прямоугольных треугольника (рис. 5б). В каждом из них отношение большего катета к меньшему равно 3, то есть эти треугольники подобны. Следовательно, равны их соответствующие углы красный и зелёный.

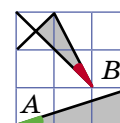
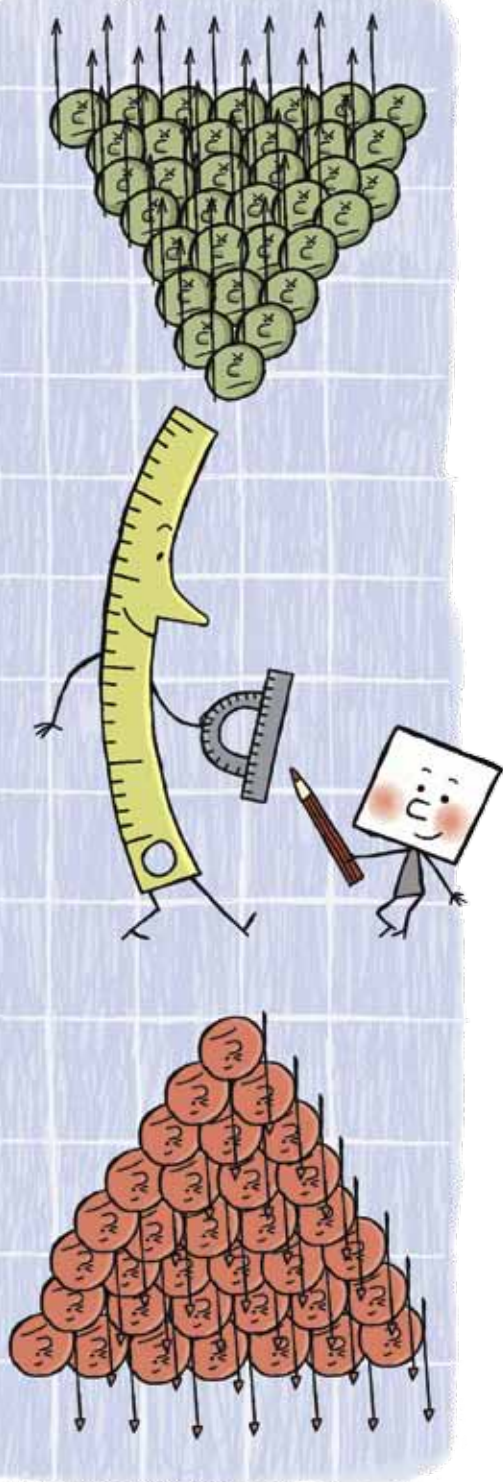


Рис. 5б

Как мы уже видели в задаче 2, в задачах «на клеточках» возможны и вычисления, причём проделать их не всегда просто. Как правило, такие задачи возникают при рассмотрении прямоугольных треугольников, прямоугольников или квадратов.

Задача 4 (В.Произволов). Найдите угол AKM (рис. 6а).

Сначала попробуем «угадать» ответ. В «клеточных» задачах, как правило, вариантов немного и ответ всегда «хороший». Похоже, что искомый



угол равен 45° . А такой угол возникает в прямоугольном равнобедренном треугольнике. Значит, требуются дополнительные построения, которые позволят заменить искомый угол на ему равный, но расположенный более удобно. Помимо равенства треугольников (применение которого мы уже разбирали), в таких случаях часто помогает параллельность.

Ответ: 45° .

Решение. Проведём AE параллельно CM (рис. 66). Тогда $\angle AKM = \angle EAN$. Так как треугольник AEN – прямоугольный и равнобедренный, то $\angle EAN = 45^\circ$, то есть $\angle AKM = 45^\circ$.

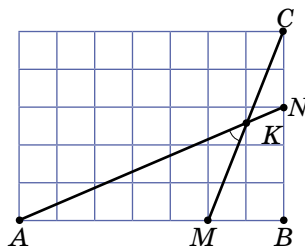


Рис. 6а

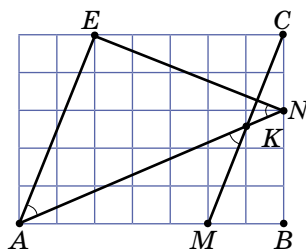


Рис. 6б

Очень красивы также задачи, в которых вычислить отдельные углы невозможно, но можно вычислить сумму нескольких углов.

Задача 5 (В.Произволов, заочный конкурс «Математика 6–8» журнала «Квант»). Найдите сумму пяти углов: $\angle MAN$, $\angle MBN$, $\angle MCN$, $\angle MDN$ и $\angle MEN$ (рис. 7а)

В таких случаях надо попытаться «состыковать» все углы, сумму которых надо найти, то есть расположить их так, чтобы они имели общую вершину, а соседние углы – общую сторону.

Ответ: 45° .

Решение. Перенесём углы вправо так, чтобы их вершина оказалась в точке E : угол $\angle MAN$ – на 4 клетки, угол $\angle MBN$ – на 3, угол $\angle MCN$ – на 2, а угол $\angle MDN$ – на одну клетку (рис. 7б). Тогда сумма пяти углов будет равна углу $\angle MEK$, то есть равна 45° .

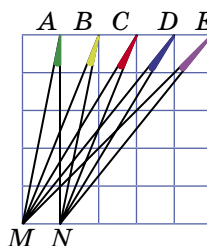


Рис. 7а

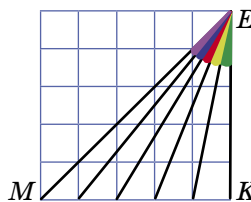
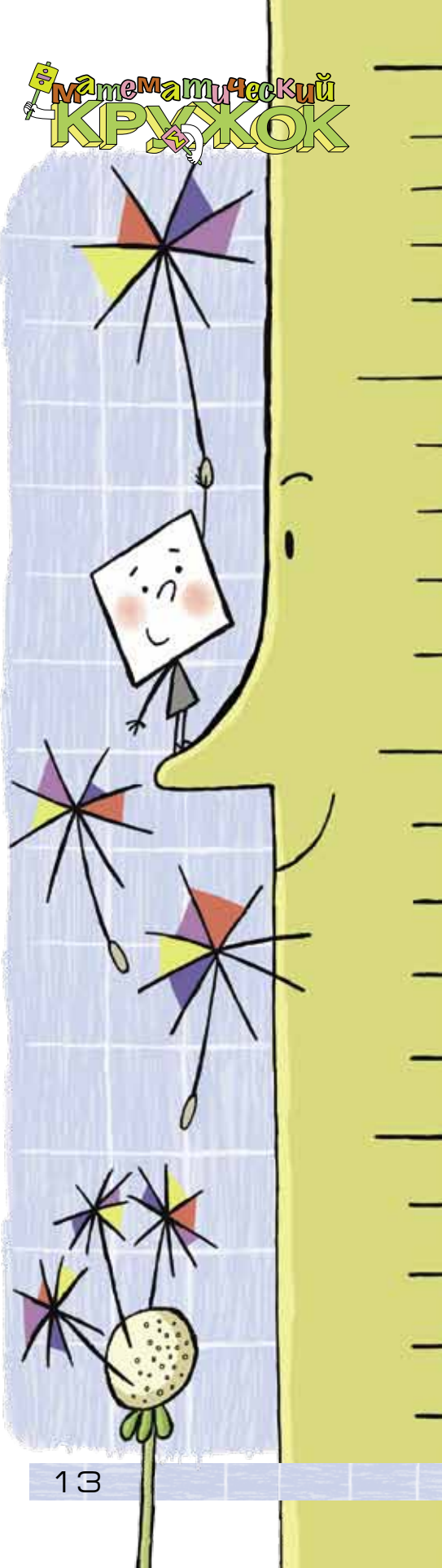


Рис. 7б





Разговор о более сложных задачах «на клеточках» мы ещё продолжим, а пока – задачи для самостоятельного решения.

Задача 6 Используя только линейку без делений, постройте центр окружности, проходящей через точки A , B и C (рисунок 8).

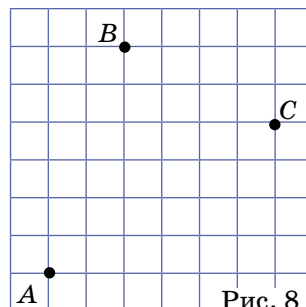


Рис. 8

Задача 7 (Р.Гордин, X Математический праздник). Постройте какой-нибудь треугольник, две медианы которого взаимно перпендикулярны.

Задача 8 (Д.Прокопенко, XVII турнир матбоёв имени А. П. Савина). Найдите угол между прямыми AE и DQ (рисунок 9).

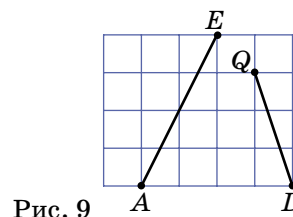
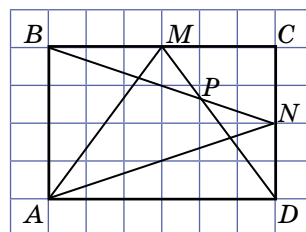


Рис. 9

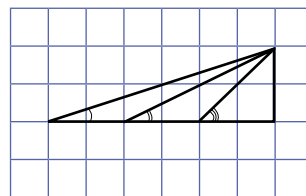
Задача 9 (В.Произолов). Докажите, что углы MAN и BPM равны (рисунок 10).

Рис. 10



Задача 10. Найдите сумму трёх углов, обозначенных на рисунке 11.

Рис. 11



Задача 11 (В.Произолов). От квадрата $ABCD$ отрезали прямоугольный треугольник MND (рисунок 12). Найдите сумму трёх углов, под которыми из вершин A , B и C видна его гипотенуза.

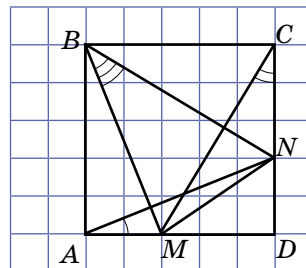


Рис. 12

общее никто из этих мальчиков не рисовал на доске. В любом случае, Коля точно не рисовал.

■ ИНДЮКИ ПРОТИВ РЯБЧИКОВ

Ясно, что в банной задаче христиане являются аналогами цыплят (потому их следует сначала отбросить), и нам придётся уравнивать евреев турками. Каждый еврей заплатил за помывку 3 денги, что больше, чем 1 денга, на 2 денги. Каждый же турок дал 0,5 денги, что меньше, чем 1 денга, на 0,5 денги. Поэтому 1 еврей «эквивалентен» (с обратным знаком) $2 : 0,5 = 4$ туркам. Итак, на каждого еврея пришлось 4 турка. Всего это 5 человек, и заплатили они, как видим, $3 + 2 = 5$ денег. Поэтому можно дать ответ: в бане мылись 1 еврей, 4 турка, а остальные 15 – христиане.

Однако это ещё не всё! Здесь есть возможность поискать другие ответы. Синхронно увеличивая число евреев и турок вдвое или даже втрое, мы тоже добьёмся равенства людей и денег, что порождает ещё два ответа:

2-й ответ – 2 еврея, 8 турок и 10 христиан;

3-й ответ – 3 еврея, 12 турок и 5 христиан.

Дальнейшее увеличение недопустимо, потому что христиане пропадают (обращаются в 0 или даже «в минус»). Следовательно, задача Магницкого имеет ровно три решения, приведённых выше.

■ ГЕОМЕТРИЯ НА КЛЕТЧАТОЙ БУМАГЕ

6. Используем тот, факт, что центр окружности совпадает с пересечением серединных перпендикуляров (рис. 1). Это следует из того, что центр окружности равноудалён от точек A , B и C .

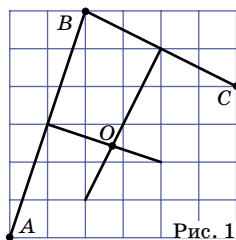


Рис. 1

7. Например, как на рис. 2. В треугольнике ABC медианы AM и BN перпендикулярны.

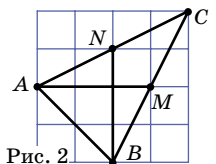


Рис. 2

8. Построим отрезок AP , равный и параллельный DQ (рис. 3). Тогда искомый угол равен углу PAE , то есть равен 45° , поскольку треугольник PAE – прямоугольный и равнобедренный.

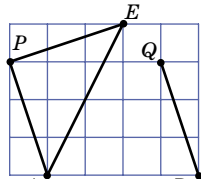


Рис. 3

9. Проведём отрезок DQ параллельно BN , тогда углы BPM , MDQ и MAN равны (рис. 4).

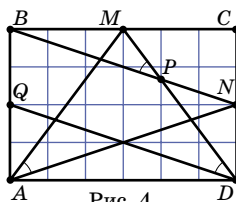


Рис. 4

10. Введём обозначения так, как показано на рис. 5, и построим угол $KAЕ$, равный углу BDC , и угол KAM , равный углу BEC . Тогда искомая сумма равна углу BAM , то есть равна 90° .

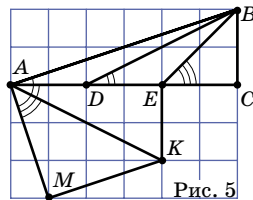


Рис. 5

11. Используем равенство двух пар треугольников: BAM и ADN , BCN и CDM , заменив углы с вершинами A и C на им равные (рис. 6). Тогда искомая сумма равна 90° .

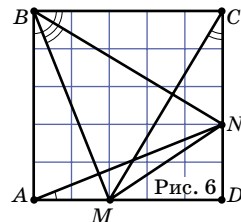


Рис. 6

■ КАКАЯ ПОЛОВИНА ВЕЛОСИПЕДА БЫСТРЕЕ?

Ответ. Ни самокат, ни велосипед никогда не едут строго по прямой. Во-первых, есть повороты маршрута, а во-вторых, даже едя прямо вы всегда немного поворачиваете то вправо, то влево, чтобы держать баланс. В результате переднее колесо едет по немного извилистому маршруту, а правое, тащась за ним, едет по сглаженному маршруту, проходя меньшее расстояние. Это объясняет случай самоката.

В случае велосипеда помимо описанного эффекта добавляется тот факт, что колёса под весом ездока сдавливаются неодинаково. Если велосипедист наклонится вперёд, большую нагрузку получит переднее колесо, оно больше сдавится, что уменьшает его эффективный радиус и оно, пройдя тот же путь, сделает больше оборотов. Если ездок отклонится назад, сдавится заднее колесо. Если при этом ехать прямо, то заднее колесо сможет крутиться быстрее переднего, даже несмотря на то, что оно проходит чуть меньший путь.

■ ХОДЖА НАСРЕДДИН, ПАГАНИНИ, ПЁТР I

Ответ: История про Петра Первого – выдумка. На самом деле, баскетбол появился лет через двести после Петра (в 1891 году), в Америке.

■ ПРИКЛЮЧЕНИЯ НА СТАНЦИИ ДРУЖИНИНО

Робот шёл от моста против течения реки, и поэтому то, что он считал левым берегом, было на самом деле правым. У речек левый и правый берега именуется по отношению к направлению течения.

Костик назвал время прибытия поезда по местному времени, а расписание поездов составляется по московскому времени. На Урале местное время опережает московское на 2 часа. Поезд прошёл через станцию Дружинино в 16 часов по часам Квантика.

■ КОСТРОМСКИЕ ПРИКЛЮЧЕНИЯ ДЛЯ ПЯТИКЛАССНИКОВ

1. Ответ: 1799, 1889, 1979.

Если сумма первых трёх цифр равна 17, а последних трёх – 25, то последняя цифра больше первой