Внеписанная окружность

А.БЛИНКОВ, Ю.БЛИНКОВ

Начнем с простого вопроса, который может возникнуть уже на начальном этапе изучения геометрии.

Пусть на плоскости заданы три прямые, которые попарно пересекаются в точках A, B и C (рис.1,*а*). Вопрос: *сколько существует точек, равноудаленных от этих прямых?*

Многие школьники дают немедленный ответ: конечно одна, а именно, центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Как часто бывает в подобных случаях, этот ответ неверен.

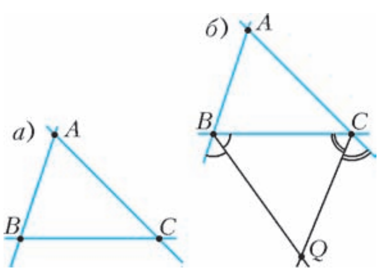


Рис. 1

Действительно, рассмотрим, например, биссектрисы внешних углов B и C треугольника ABC (рис.1,*б*). Так как сумма углов, образованных ими со стороной BC, меньше, чем 180°, то эти биссектрисы пересекутся в некоторой точке Q. Тогда точка Q равноудалена от прямых AB, AC и BC. Аналогично, рассматривая другие пары внешних углов треугольника ABC, получим еще две точки, обладающие требуемым свойством.

Таким образом, помимо центра окружности, вписанной в треугольник ABC, существуют, по крайней мере, *еще три точки*, равноудаленные от заданных прямых. Каждая из этих точек является центром *окружности, касающейся стороны треугольника и продолжений двух других сторон.* Такие окружности называют *вневписанными* для данного треугольника ABC.

Упражнения

1. Докажите, что других точек, равноудаленных от прямых AB, AC и BC, не существует (т.е. их ровно четыре).

2. Докажите, что точка Q лежит на биссектрисе угла BAC (см. рис.1,*б*).

3. Вычислите угол BQC, если $\angle BAC = \alpha$.

Посмотрим, как могут применяться изложенные факты.

Задача 1. *Постройте треугольник ABC, зная положение трех точек A_1, B_1 и C_1, являющихся центрами вневписанных окружностей треугольника ABC.*

Решение. Пусть искомый треугольник ABC построен. Центр каждой его вневписанной окружности лежит на пересечении соответствующих биссектрис внутреннего и внешнего углов. Проведя их, получим точки A_1, B_1 и C_1 (рис.2).

Так как биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой, то вершины A, B и C искомого треугольника лежат на сторонах треугольника $A_1B_1C_1$. Кроме того, так как биссектриса внешнего угла треугольника перпендикулярна биссектрисе внутреннего угла, проведенной из той же вершины, то $A_1A \perp B_1C_1$, $B_1B \perp A_1C_1$, $C_1C \perp A_1B_1$.

Таким образом, решение задачи сводится к построению треугольника $A_1B_1C_1$ и его высот.

Используя результат упражнения 3, нетрудно доказать, что задача имеет решение (причем единственное) тогда и только тогда, когда треугольник $A_1B_1C_1$ – остроугольный.

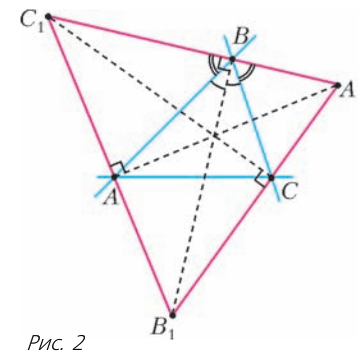


Рис. 2

Это позволяет сформулировать полезный факт: *вершины остроугольного треугольника являются центрами вневписанных окружностей для его ортотреугольника* (треугольника, образованного основаниями высот).

Геометрические конфигурации, связанные с вневписанными окружностями, очень содержательны и встречаются во многих задачах. Рассмотрим основные факты, связанные с такими конфигурациями.

Пусть вневписанная окружность касается стороны BC треугольника ABC в точке M, а продолжений сторон AB и AC – в точках P и T соответственно. Вписанная в этот треугольник окружность касается сторон BC, AB и AC в точках K, L и N соответственно (рис.3). Докажем следующие равенства:

1. $BK = p - b$, где p – полупериметр треугольника ABC, b – длина стороны AC;

2. $AP = p$;

3. $BK = CM$, т.е. *точки касания вписанной и вневписанной окружностей со стороной треугольника симметричны относительно середины этой стороны*.

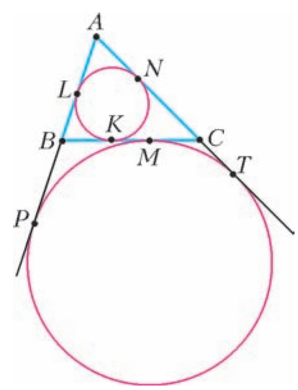


Рис. 3

Действительно, из равенства отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки, получим: $AN = AL$, $BK = BL$ и $CN = CK$. Сумма этих шести отрезков составляет периметр треугольника ABC, поэтому $AN + BK + CN = p$. Учитывая, что $AN + CN = b$, получаем равенство 1.

Применяя эту же теорему об отрезках касательных к другой окружности, получим: $AP = AT$, $BM = BP$ и $CM = CT$. Тогда $P_{ABC} = AB + AC + BC = AB + AC + BM + CM = AB + AC + BP + CT = AP + AT = 2AP$, откуда следует равенство 2.

Так как $AT = p$, то и $CM = CT = AT - AC = p - b = BK$. Таким образом, доказано равенство 3.

Упражнение 4. Пользуясь обозначениями рисунка 3, докажите, что: а) $PL = BC$; б) *прямая AM делит периметр треугольника ABC пополам*.

Теперь получим соотношения, связывающие *радиусы* вписанной и вневписанной окружностей. Для этого (временно убрав обозначения некоторых точек) дополним рисунок 3, отметив центры вписанной и вневписанной окружностей – точки I и Q соответственно – и проведя радиусы $IL = r$ и $QP = r_a$ этих окружностей (рис.4). Тогда прямоугольные треугольники AIL и AQP подобны (так как у них общий острый угол), поэтому $\frac{IL}{QP} = \frac{AL}{AP} = \frac{AI}{AQ}$. Учитывая, что $AL = p - a$ (см. равенство 1) и $AP = p$ (см. равенство 2), получим, что $\frac{r}{r_a} = \frac{p-a}{p}$. Из этого соотношения, в частности, можно получить формулу, выражающую площадь треугольника

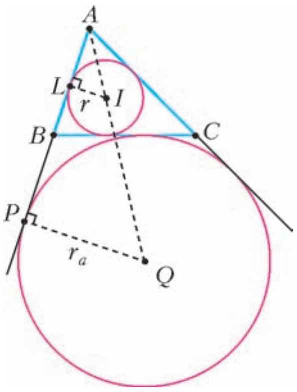


Рис. 4

через радиус вневписанной окружности. Действительно, так как $S_{ABC} = pr$, то $S_{ABC} = (p-a)r_a$.

Тем самым мы доказали еще два полезных равенства:

4. $\dfrac{r}{r_a} = \dfrac{p-a}{p}$;

5. $S_{ABC} = (p-a)r_a$.

Упражнение 5. Докажите, что в любом треугольнике выполняются равенства:

а) $r_a = p\,\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, где α – угол треугольника, противолежащий стороне a;

б) $r_a : r_b : r_c = \dfrac{1}{p-a} : \dfrac{1}{p-b} : \dfrac{1}{p-c}$;

в) $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c}$;

г) $S = \sqrt{r r_a r_b r_c}$.

Еще один интересный факт можно получить, решив следующую задачу.

Задача 2. *Продолжение биссектрисы угла A треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке M; I – центр окружности, вписанной в треугольник ABC; Q – центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC. Докажите, что точки B, C, I и Q лежат на окружности с центром M.*

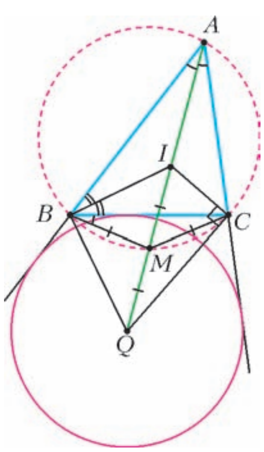


Рис. 5

Решение. По условию, I – точка пересечения биссектрис треугольника ABC, а Q – точка пересечения биссектрисы угла A и биссектрис внешних углов при вершинах B и C (рис.5). Так как $\angle IBQ = \angle ICQ = 90^\circ$, то точки B и C лежат на окружности с диаметром IQ.

Пусть $\angle BAC = \alpha$; $\angle ABC = \beta$. Угол BIM – внешний для треугольника AIB, значит, $\angle BIM = \angle IAB + \angle IBA = \dfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$.

Кроме того, $\angle IBM = \angle IBC + \angle MBC = \dfrac{1}{2}\alpha + \dfrac{1}{2}\beta$, так как $\angle MBC = \angle MAC = \dfrac{1}{2}\beta$ (вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу окружности, описанной около треугольника ABC). Следовательно, $\angle BIM = \angle IBM$, т.е. $MI = MB$.

Аналогично получим, что $MI = MC$, значит, M – центр окружности, описанной около треугольника BIC, а точка Q лежит на этой окружности, т.е. точки B, C, I и Q лежат на окружности с центром M.

Отметим, что равенство $MB = MC = MI$, являющееся следствием доказанного утверждения, иногда называют *теоремой о «трилистнике»*.

Далее рассмотрим несколько «классических» задач, в которых вневписанная окружность выступает в роли «вспомогательной».

Задача 3. *Постройте прямую, проходящую через данную точку и отсекающую от данного угла треугольник с заданным периметром.*

Решение. Пусть на плоскости даны угол O и точка M. Предположим, что искомая прямая AB построена, т.е. треугольник AOB имеет заданный периметр P. Проведем окружность, касающуюся сторон данного угла и отрезка AB (рис.6). Пусть K и L – точки касания этой окружности со сторонами угла, тогда $OK = OL = \dfrac{1}{2}P$ (см. равенство 2).

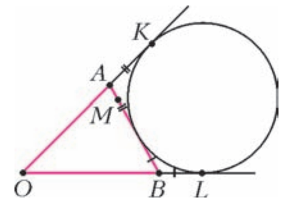


Рис. 6

Таким образом, решение задачи сводится к построению вспомогательного равнобедренного треугольника KOL (сторону KL которого можно не проводить) и окружности, касающейся сторон данного угла в точках K и L. После этого через точку M проводится касательная AB к этой окружности.

Отметим, что в зависимости от расположения точки M задача может иметь два решения, одно решение или не иметь решений.

Задача 4. *В треугольнике ABC с углом B, равным 120°, проведены биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1. а) Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ – прямоугольный. б) Найдите угол B_1C_1C.*

Решение. а) На продолжении стороны AB (за точку B) отметим точку D, тогда $\angle DBC = 60^\circ$, т.е. луч BC – биссектриса угла DBB_1 (рис.7). Так как AA_1 – биссектриса угла

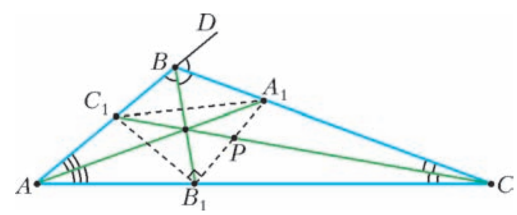


Рис. 7

BAC, то A_1 – центр окружности, касающейся BB_1, BD и B_1C. Такая окружность является вневписанной для треугольника ABB_1, поэтому B_1A_1 – биссектриса угла BB_1C. Аналогично, C_1 – центр вневписанной окружности для треугольника CBB_1, поэтому B_1C_1 – биссектриса угла BB_1A. Следовательно, $\angle A_1B_1C_1 = 90^\circ$.

б) Из доказанного следует, что точка P пересечения CC_1 и B_1A_1 является пересечением биссектрис треугольника BCB_1. Следовательно,

$$\angle B_1PC = 180^\circ - (\angle PB_1C + \angle PCB_1) = 180^\circ - \frac{\angle BB_1C + \angle BCB_1}{2} = 120^\circ.$$

Так как $\angle B_1PC$ – внешний для прямоугольного треугольника PB_1C_1, то $\angle B_1C_1C = \angle B_1PC - 90^\circ = 30^\circ$.

Задача 5. *На стороне BC квадрата ABCD выбрана точка M, а на стороне CD – точка K так, что угол MAK равен 45°. Докажите, что расстояние от вершины A до прямой MK равно стороне квадрата.*

Решение. Пусть точка P – основание перпендикуляра, опущенного из вершины A на прямую MK (рис.8). Проведем диагональ AC квадрата и рассмотрим треугольник CMK. Точка A лежит на биссектрисе угла C этого треугольника и $\angle MAK = 90^\circ - \dfrac{1}{2}\angle C$, следовательно, A является центром вневписанной окружности треугольника CMK (см. упражнение 3). Тогда $AP = AB = AD$ (радиусы этой окружности).

Отметим, что из доказанного следует также, что периметр треугольника CMK равен половине периметра квадрата.

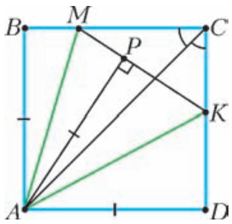


Рис. 8

Заметим также, что эту задачу можно было решить и другим способом: рассмотрев образ треугольника ADK при повороте с центром A на угол 90° (против часовой стрелки).

Упражнение 6. Докажите обратное утверждение: если отрезок MK отсекает от квадрата $ABCD$ треугольник CMK, периметр которого равен половине периметра квадрата, то угол MAK равен 45° (см. рис.8).

Рассмотрим еще несколько любопытных фактов, связанных с вневписанными окружностями. Вернувшись к рисунку 4, отметим, что равенство 4 можно было получить не из подобия треугольников, а из того, что при гомотетии с центром A и коэффициентом $k = \dfrac{AQ}{AI}$ вневписанная окружность переходит во вписанную. Эта же гомотетия позволяет заметить важное утверждение: пусть точка F диаметрально противоположна точке K касания вписанной окружности со стороной BC (рис.9). Тогда *точки A, F и M лежат на одной прямой*.

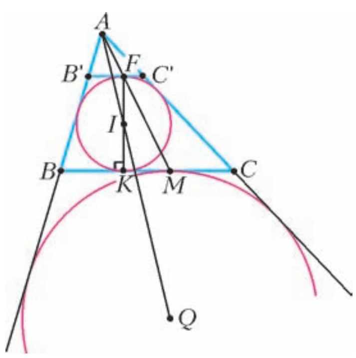


Рис. 9

Действительно, образом касательной BC к вневписанной окружности при указанной гомотетии является касательная $B'C'$ к вписанной окружности, причем $B'C' \parallel BC$ (см. рис.9). Поэтому образом точки M является точка касания $B'C'$ и вписанной окружности, которая совпадает с точкой F, поскольку диаметр FK, перпендикулярный BC, перпендикулярен также и $B'C'$.

Упражнение 7. На рисунке 9 проведем луч AK, который вторично пересечет вневписанную окружность в точке E. Докажите, что $ME \perp BC$.

Задача 6. *Докажите, что середина высоты треугольника, центр вписанной в него окружности и точка касания стороны, на которую опущена высота, с соответствующей вневписанной окружностью лежат на одной прямой.*

Решение. Рассмотрим треугольник ABC, в котором AH – высота, точка D – ее середина, точки I и Q – центры вписанной и вневписанной (касающейся стороны BC) окружностей соответственно, K и M – точки касания этих окружностей со стороной BC (рис.10).

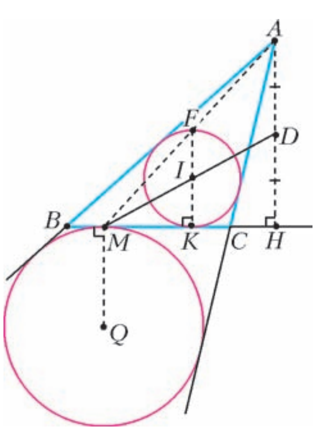


Рис. 10

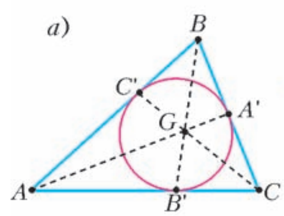
Проведем KF – диаметр вписанной окружности, тогда точки A, F и M лежат на одной прямой. Так как $KF \parallel AH$, то медиана MD треугольника AMH проходит через середину отрезка KF, т.е. содержит точку I.

Упражнения

8. Докажите, что в прямоугольном треугольнике центр вписанной окружности, середина катета и точка касания другого катета с вневписанной окружностью лежат на одной прямой.

9. Докажите, что точки D, K и Q (см. рис.10) лежат на одной прямой.

Эффективность применения некоторых из полученных ранее соотношений можно показать еще на одном ярком примере. Известно, что *если в треугольник ABC вписана окружность, касающаяся его сторон в точках A', B' и C', то отрезки AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке* (называемой *точкой Жергонна*; рис.11,*а*). Для доказательства этого утверждения достаточно использовать то, что $AB' = AC'$, $BC' = BA'$ и $CA' = CB'$. Тогда $\dfrac{AB'}{B'C}\cdot\dfrac{CA'}{A'B}\cdot\dfrac{BC'}{C'A} = 1$, откуда по теореме Чевы и следует, что указанные отрезки пересекаются в одной точке.



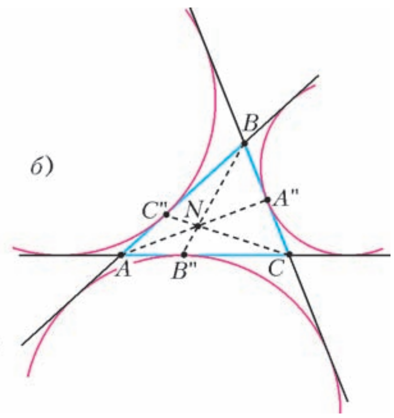


Рис. 11

Аналогичное утверждение верно и для точек касания вневписанных окружностей со сторонами треугольника, т.е. *если A'', B'' и C'' – точки касания вневписанных окружностей со сторонами треугольника ABC, то отрезки AA'', BB'' и CC'' пересекаются в одной точке* (называемой *точкой Нагеля*; рис.11,*б*).

Для того чтобы свести доказательство этого утверждения к предыдущему, достаточно опять использовать теорему Чевы и доказанное равенство 3, заменяя в каждом случае расстояние от вершины до точки касания стороны и вневписанной окружности на равное ему расстояние от вершины до точки касания этой стороны и вписанной окружности.

Приведенный пример иллюстрирует часто встречающуюся *двойственность* утверждений, касающихся вписанной и вневписанной окружностей.

Упражнение 10. Пользуясь обозначениями рисунка 3, докажите, что прямые AM, BT и CP пересекаются в одной точке.

Вневписанная окружность часто «всплывает» и при изучении стереометрии. Рассмотрим, например, треугольник ABC и точку P, не лежащую в его плоскости и равноудаленную от прямых AB, BC и AC. Пусть точка Q – ортогональная проекция точки P на плоскость ABC. Какую роль играет точка Q по отношению к треугольнику ABC?

И в этом случае (так же, как и в планиметрии) некоторые школьники дают неверный ответ: «Q – центр окружности, вписанной в треугольник ABC».

На самом деле, из условия следует только, что точка Q равноудалена от прямых, содержащих стороны треугольника (по теореме о трех перпендикулярах и по свойству равных наклонных, проведенных к плоскости из одной точки). Поэтому точка Q является либо центром окружности, вписанной в треугольник ABC, либо центром одной из вневписанных окружностей этого треугольника (рис.12,*а*,*б*).

Упражнения

11. Для треугольной пирамиды $PABC$ докажите равносильность утверждений а)–г):

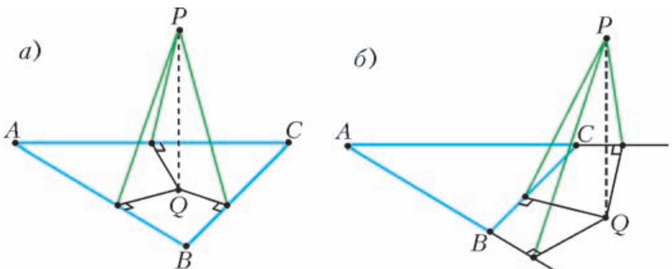


Рис. 12

а) Ортогональной проекцией вершины P на плоскость ABC является либо центр окружности, вписанной в треугольник ABC, либо центр одной из вневписанных окружностей этого треугольника.

б) Высоты боковых граней, проведенные из вершины P, равны.

в) Плоскости боковых граней одинаково наклонены к плоскости основания.

г) Плоскости боковых граней образуют одинаковые углы с высотой пирамиды.

12. В основании пирамиды – правильный треугольник со стороной 1. Каждая боковая грань пирамиды образует с основанием угол 60°. Найдите высоту пирамиды, если известно, что ее длина больше, чем 0,5.

13. Докажите, что в треугольной пирамиде, у которой боковые грани образуют одинаковый угол φ с плоскостью основания, площадь боковой поверхности можно вычислить по формуле: $S_{\text{бок}} = \dfrac{pr}{\cos\varphi}$, где p – полупериметр основания, r – либо радиус окружности, вписанной в основание, либо радиус вневписанной окружности.

В заключение выразим надежду, что рассмотренные утверждения, факты и соотношения, а также упражнения и разобранные задачи, позволят читателю успешно справиться с циклом задач, которые мы предлагаем для самостоятельного решения.

Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что треугольник является прямоугольным тогда и только тогда, когда:

а) радиус одной из вневписанных окружностей равен полупериметру треугольника;

б) площадь треугольника равна произведению радиусов вписанной и одной из вневписанных окружностей;

в) площадь треугольника равна произведению двух радиусов вневписанных окружностей.

2. Отрезок, отличный от диагонали, разбивает квадрат на два многоугольника, в каждый из которых вписана окружность. Найдите длину этого отрезка, если радиусы окружностей равны R и r ($R > r$).

3. Постройте треугольник по углу, высоте, проведенной из вершины этого угла, и периметру.

4. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BE. Оказалось, что DE – биссектриса треугольника ADC. Найдите угол BAC.

5. Углы, прилежащие к одной из сторон треугольника, равны 15° и 30°. Какой угол образует с этой стороной проведенная к ней медиана?

6. Точка E на стороне AD квадрата $ABCD$ такова, что $\angle AEB = 60^\circ$. Биссектриса угла ABE, отразившись от стороны AD, пересекает отрезок BE в точке F. Докажите, что точка F лежит на диагонали квадрата.

7. На полосу наложили квадрат, сторона которого равна ширине полосы, так, что его граница пересекает границы полосы в четырех точках. Докажите, что две прямые, проходящие крест-накрест через эти точки, пересекаются под углом 45°.

8. Дан треугольник ABC. На лучах AB и AC (вне треугольника) построены точки A_1 и A_2 соответственно так, что $BA_1 = CA_2 = BC$. A_0 – точка пересечения отрезков BA_2 и CA_1. Докажите, что прямая, проходящая через A_0 перпендикулярно прямой BC, содержит центр вневписанной окружности треугольника ABC.

9. Окружность с центром D проходит через вершины A, B и центр Q вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся его стороны BC. Докажите, что точки A, B, C и D лежат на одной окружности.

10. $ABCD$ – параллелограмм. Вневписанные окружности треугольников ABC и ACD касаются сторон BC и CD соответственно. Докажите, что точки их касания с прямой AC совпадают.

11. Дан параллелограмм $ABCD$. Вневписанная окружность треугольника ABD касается продолжений сторон AD и AB в точках M и N. Докажите, что точки пересечения отрезка MN со сторонами BC и CD лежат на вписанной окружности треугольника BCD.

12. Постройте четырехугольник $ABCD$ по двум сторонам AB и AD и двум углам B и D, если известно, что в него можно вписать окружность.

13. а) Докажите, что произведение расстояний от вершины треугольника до центра вписанной окружности и до центра соответствующей этой вершине вневписанной окружности равно произведению сторон треугольника, сходящихся в этой вершине.

б) Через две вершины треугольника и центр вписанной в него окружности проведена окружность. Докажите, что отрезок касательной, проведенной к этой окружности из третьей вершины, есть среднее геометрическое между сторонами треугольника, сходящимися в этой вершине.

14. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник, касается катета BC и гипотенузы AB в точках P и Q соответственно. Вневписанная окружность, касающаяся катета BC, касается продолжения катета AC в точке T. Докажите, что точки P, Q и T лежат на одной прямой.

15. а) Через середину D стороны BC треугольника ABC и центр I окружности, вписанной в этот треугольник, проведена прямая, пересекающая высоту AH в точке E. Докажите, что отрезок AE равен радиусу вписанной окружности.

б) Биссектриса угла A пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке W. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны BC в точке K, P – точка пересечения прямой WK с высотой AH. Докажите, что отрезок HP равен радиусу вписанной окружности.

16. а) Через середину D стороны BC треугольника ABC и центр Q вневписанной окружности, касающейся этой стороны, проведена прямая, пересекающая высоту AH в точке T. Докажите, что отрезок AT равен радиусу этой вневписанной окружности.

б) Биссектриса угла A пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке W, M – точка касания вневписанной окружности со стороной BC, Z – точка пересечения прямой WM с высотой AH. Докажите, что отрезок HZ равен радиусу этой вневписанной окружности.

17. Вневписанная окружность треугольника ABC касается его стороны BC в точке K, а продолжения стороны AB – в точке L. Другая вневписанная окружность касается продолжений сторон AB и AC в точках M и N соответственно. Прямые KL и MN пересекаются в точке X. Докажите, что CX – биссектриса угла ACN.

18. Равнобедренные треугольники ABC и $A'B'C'$ лежат в параллельных плоскостях. Известно, что точка C' равноудалена от вершин треугольника ABC, а каждая из точек B' и C' находится на таком же расстоянии от прямых AB, BC и AC. Найдите отношение площадей данных треугольников.

(Продолжение см. на с. 45)

Решение. Неравенство имеет четвертую степень, поэтому произведение abc может входить в разложение левой части по элементарным симметрическим многочленам только в первой степени. Если[8] коэффициент при abc отрицателен, сдвинем график многочлена $f(t)=(t-a)(t-b)(t-c)$ вниз, так, чтобы он зацепился точкой максимума за ось абсцисс. А если этот коэффициент положителен, то будем сдвигать этот график вверх до тех пор, пока не произойдет одно из двух событий: график зацепится за ось абсцисс точкой минимума или один из корней обратится в ноль. В результате мы получим более сильное неравенство. Значит, исходное неравенство достаточно доказать в двух частных случаях: когда два из трех чисел равны, и когда одно из чисел обращается в ноль.

В случае $b=c$ получим $a^4-4a^2b^2+ab^2(a+2b)\ge 0$. Разделив на b^4 и обозначив $t = a/b$, получим равносильное неравенство $t\left(t^3-3t+2\right)\ge 0$. Оно обращается в ноль при $t = 1$, значит, естественно предположить, что $t^3-3t+2 = (\alpha t+\beta)(t-1)^2$. Сравнивая старшие коэффициенты и свободные члены слева и справа, находим $\alpha = 1$ и $\beta = 2$. Теперь нетрудно проверить, что $t^3-3t+2=(t+2)(t-1)^2$. При положительных t это выражение неотрицательно.

В случае $c = 0$ доказываемое неравенство очевидно.

Упражнения

12 (Международная олимпиада, 1984 г.). Пусть a, b, c – неотрицательные действительные числа такие, что $a + b + c = 1$. Докажите, что $0\le ab+ac+bc-2abc\le 7/27$.

13 (М1834). Для действительных чисел x, y, z докажите неравенство $x^6+y^6+z^6+3x^2y^2z^2\ge 2\left(x^3y^3+x^3z^3+y^3z^3\right)$.

14. Пусть x, y, z – произвольные действительные числа, $p = x + y + z$, $q = xy + xz + yz$, $r = xyz$. Докажите неравенство $3(3r-pq)^2\le 4\left(p^2-2q\right)\left(2q^2-3pr\right)$.

15. а) Пусть a, b и c – длины сторон произвольного треугольника. Докажите, что

$$a\left(b^2+c^2-a^2\right)+b\left(a^2+c^2-b^2\right)+c\left(a^2+b^2-c^2\right)\le 3abc.$$

б) Пусть α,β,γ – углы треугольника. Докажите неравенство $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\le 3/2$.

16. Пусть r_a, r_b, r_c – радиусы вневписанных окружностей некоторого треугольника, m_a, m_b, m_c – длины его медиан. Докажите неравенство $m_am_bm_c\ge r_ar_br_c$.

[8] *Мне не хочется разбираться, какой из двух случаев на самом деле имеет место. Проще разобрать оба.*

17. Пусть $A=\sin\alpha\sin\beta+\sin\beta\sin\gamma+\sin\alpha\sin\gamma$. Докажите, что

а) $A\le 9/4$, если α,β,γ – углы произвольного треугольника;

б) $A > 1$, если α,β,γ – углы остроугольного треугольника;

в) $A\le\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2}$, если α,β,γ – углы неостроугольного треугольника.

18 (Московская олимпиада, 1997 г.). Положительные числа a, b, c таковы, что $abc = 1$. Докажите, что

$$\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+a+c}+\frac{1}{1+b+c}\le 1.$$

19. Пусть r и R – радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника, p – его полупериметр. Докажите неравенство $5R-r\ge\sqrt{3}p$.

20. Сумма положительных чисел x, y, z равна $\dfrac{\pi}{2}$. Докажите, что

$$\cos x+\cos y+\cos z\ge 1+\sin x+\sin y+\sin z.$$

21. Действительные числа x, y, z удовлетворяют условиям $x+y+z=0$, $x^2+y^2+z^2=1$. Найдите наибольшее значение суммы $x^3+y^3+z^3$.

22 (олимпиада США, 2001 г.). Неотрицательные числа a, b, c удовлетворяют условию $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Докажите, что $0\le ab+bc+ac-abc\le 2$.

23 (М1364). Пусть $a + b + c = 1$, $a\ge 0$, $b\ge 0$, $c\ge 0$. Докажите неравенство

$$a^3+b^3+c^3+abcd\ge\min\left\{\frac{1}{4},\frac{1}{9}+\frac{d}{27}\right\}.$$

24. Пусть a, b, c – неотрицательные числа. Докажите, что

$$a^4+b^4+c^4-2\left(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2\right)+3(abc)^{4/3}\ge 0.$$

25. Правильный треугольник ABC вписан в окружность единичного радиуса. Точка X лежит на этой окружности.

а) Какое наибольшее значение может иметь произведение расстояний $AX\cdot BX\cdot CX$?

б) Найдите наибольшее и наименьшее значения суммы $AX + BX + CX$.

26 (Всесоюзная олимпиада, 1980 г.). Пусть длины ребер прямоугольного параллелепипеда равны a, b и c сантиметров ($a < b < c$), а $p = 4(a + b + c)$, $s = 2(ab + bc + ac)$ и $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ – соответственно его периметр, площадь поверхности и длина диагонали. Докажите, что

$$a<\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}p-\sqrt{d^2-\frac{1}{2}s}\right),\quad c>\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}p+\sqrt{d^2-\frac{1}{2}s}\right).$$

Вневписанная окружность

(Начало см. на с. 34)

Список литературы

1. Р.К.Гордин. *Геометрия. Планиметрия.* Задачник для 7 – 9 классов. – М.: МЦНМО, 2004.

2. И.А.Кушнир. *Триумф школьной геометрии. Учебное пособие для 7 – 11 классов.* – Киев: Наш час, 2005.

3. Л.М.Лоповок. *Факультативные задания по геометрии для 7 – 11 классов.* – Киев: Радянская школа, 1990.

4. *Математические турниры имени А.П.Савина* / Сост. А.В. Спивак, С.И. Токарев: в 2 ч. – М.: Бюро Квантум, 2003 и 2006.

5. *Московские математические регаты* / Сост. А.Д.Блинков, Е.С.Горская, В.М.Гуровиц. – М.: МЦНМО, 2007.

6. Я.П.Понарин. *Элементарная геометрия*: в 2 т. – М.: МЦНМО, 2004 и 2006.

7. В.В.Прасолов. *Задачи по планиметрии*: в 2 ч. – М.: Наука, 1995.

8. В.В.Произволов. *Задачи на вырост.* – М.: Бюро Квантум, 2003.

9. В.Ю.Протасов. *Касающиеся окружности: от Тебо до Фейербаха.* «Квант», №4, 2008.

10. И.Ф.Шарыгин, Р.К.Гордин. *Сборник задач по геометрии. 5000 задач с ответами.* – М.: Астрель, 2001.

Список веб-ресурсов

1. *www.problems.ru* – база задач по математике.

2. *www.geometry.ru* – всероссийская олимпиада по геометрии имени И.Ф.Шарыгина.

3. *olympiads.mccme.ru/ustn* – устные геометрические олимпиады.

Авторы благодарны П.А.Кожевникову и В.Ю.Протасову за ценные замечания по тексту и Е.С.Горской за выполнение чертежей.