«Угловые» приключения барона Мюнхгаузена

Дорогие ребята! Я наслышан о журнале «Квантик», в котором вы встречаетесь с необыкновенными задачами и аналогичными историями. Знаю, что вы не пасуете ни перед какими трудностями!.. Поэтому и хочу поведать вам о некоторых своих приключениях. И хотя неприятель частенько хотел, что называется, «загнать меня в угол» и даже «стереть в порошок», ничего у него не выходило. Ибо я всегда проявлял недюжинную находчивость и грандиозную изобретательность. Скажу вам по секрету, что и то, и другое я возымел благодаря неслабым геометрическим познаниям. Впрочем, судите сами!..

Во всех задачах будет дан угол *A* и точка *M* внутри угла. *M* – это я, ваш покорный слуга, барон Фридрих Иеронимус фон Мюнхгаузен. Условия я вам буду предлагать в виде историй, а решения – в виде настоящих геометрических решений.

И последнее. Предложенные вам геометрические задачи на построение следует выполнять с помощью циркуля и линейки без делений.

Задача - История 1.

Однажды я (точка *M*) оказался в угловой местности *A* – владении огнедышащего дракона. Дабы огонь дракона не сжёг меня, необходимо было перемещаться по отрезку *BC*, где *AB* = *AC* *(рис.1)*. Как мне удалось отыскать спасительные точки *B* и *C* на сторонах угла *A*?

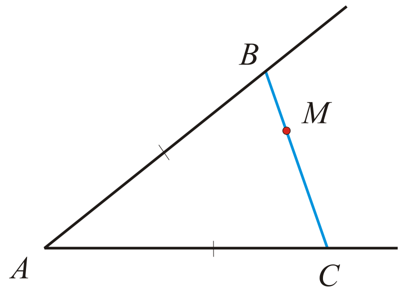

рис.1

Решение.

Проведём биссектрису *l* угла *A* и через точку *M* – прямую перпендикулярно *l* *(рис.2)*. Она будет пересекать стороны угла в искомых точках *B* и *C*. Действительно, в ΔABC прямая *l* совпадает с биссектрисой и высотой. Стало быть, ΔABC – равнобедренный и *AB* = *AC*.

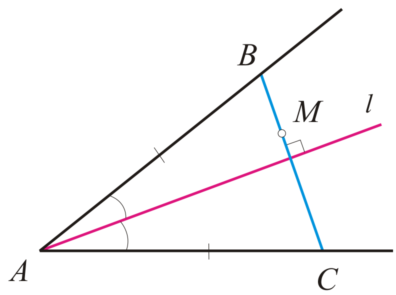

рис.2

Задача - История 2.

Когда я упал с Луны, то сильно ударился о поверхность

Южного моря и потерял сознание. Пиратский корабль взял меня в плен и вместе со мной (точка *M*) вошёл в угловой залив *A*. В давние времена по берегам залива были зарыты два клада в точках *B* и *C*, причём *AB* = *BM* = *MC* *(рис.3)*. Пираты грозились вздёрнуть меня на рее, если я не укажу им места расположения кладов. Ладно! – решил я. – Что-то неохота болтаться на рее… И достаточно быстро указал им, где находятся точки *B* и *C*. Как мне это удалось?

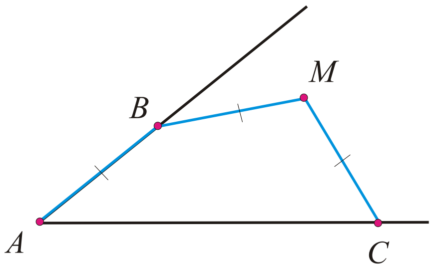

рис.3

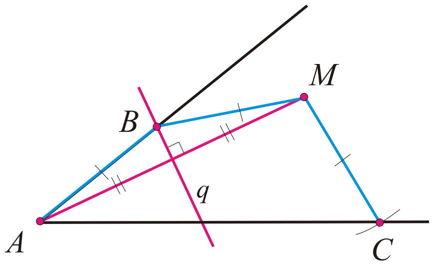

рис.4

Решение.

Соединим *A* и *M*. Серединный перпендикуляр *q* к отрезку *AM* пересекает одну из сторон угла в точке *B* *(рис.4)*. Очевидно при этом, что *AB* = *BM*. Тогда из точки *M* раствором циркуля, равным *BM*, делаем засечку на второй стороне угла. Получаем точку *C*. Итак, *AB* = *BM* = *MC*.

Задача - История 3.

Турецкий султан, у которого я был в гостях, из ревности к моим подвигам и геометрическим познаниям решил самым настоящим образом «загнать меня в угол». Он велел поместить меня в точку *M* в угловой местности *A* и потребовал, чтобы на сторонах угла я ему нашёл такие точки *B* и *C*, чтобы *M* оказалась точкой пересечения высот (ортоцентром) в ΔABC *(рис.5)*.

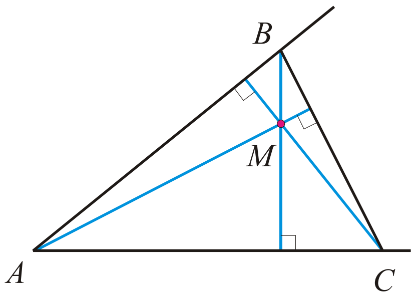

рис.5

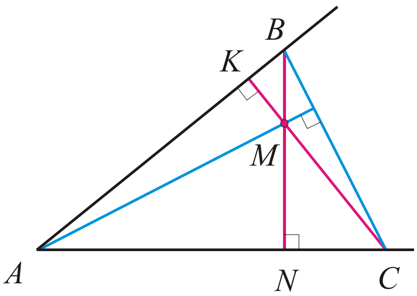

рис.6

Решение.

Проведем через точку *M* прямые перпендикулярно сторонам угла: *BN* и *CK* *(рис.6)*. Таким образом, *BN* и *CK* – высоты в ΔABC. Поскольку все три высоты в треугольнике пересекаются в одной точке, то луч *AM* совпадёт с третьей высотой ΔABC. А это означает, что *M* – ортоцентр этого треугольника.

Задача - История 4.

Было время, когда огромный дикий кабан терроризировал местных жителей в окрестностях Булонского леса. А я как раз оказался в этих местах, и они попросили меня о помощи. И вот представьте: угловая местность *A*, в вершине которой находится дикий кабан. Я с ружьём, не знающим промаха, но… Вот беда, спустился густейший туман и вершины A не видно *(рис.7)*. Тем не менее, я высчитал, где находится вершина A (а с ней – и дикий кабан) и метким выстрелом MA в мгновение ока уложил последнего!.. Как мне это удалось?

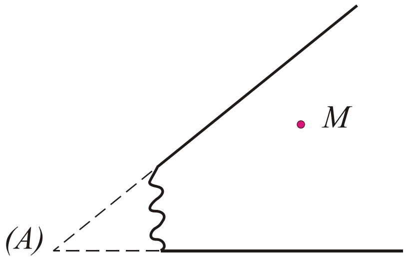

рис.7

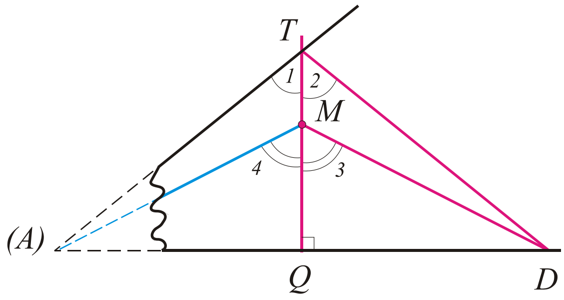

рис.8

Решение.

Через M проведём перпендикуляр TQ к одной из сторон угла – получим $\angle 1$ *(рис.8)*. Проведём TD под углом 2, равным углу 1. Соединим D и M – получим $\angle 3$. Луч из точки M, проведённый под углом 4, равным углу 3, пройдёт через невидимую вершину A. Покажите это сами!..

Задача - История 5.

Как-то мне пришлось прятаться в кустах (в точке M) внутри углового поля брани A. Вдруг кусты, оказавшись стаей диких уток, взлетели, и я остался у неприятеля, как на ладони. По сторонам угла A они подтягивали две свои главные пушки в такие точки B и C, чтобы точка M была серединой отрезка BC ($BM = MC$) – *рис.9*. Выстрелив одновременно, они тем самым рассчитывали с гарантией уничтожить меня. Надо вам заметить, что я сам указал им положение точек B и C. Когда обе пушки, наконец, выстрелили, я резко схватил себя за волосы и подбросил высоко вверх. А два ядра столкнулись, после чего с почти той же скоростью понеслись обратно в точки B и C, нанеся там немалые разрушения. Как мне удалось определить положение точек B и C?

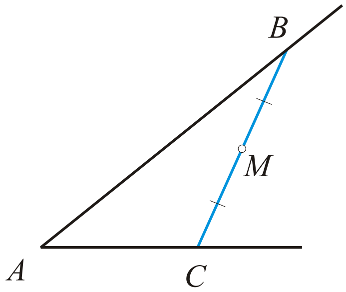

рис.9

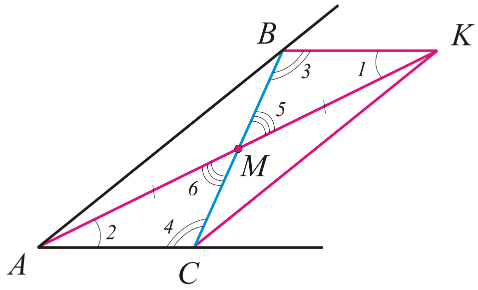

рис.10

Решение.

Соединим A и M и удвоим отрезок AM за точку M – получим точку K *(рис.10)*. Через K проведем прямые параллельно сторонам угла. В пересечении получим искомые точки B и C. Действительно, $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$ – как внутренние накрест лежащие при соответствующих параллельных прямых. Тогда и $\angle 5 = \angle 6$, то есть точки B, M, C лежат на одной прямой. Значит, $\Delta BMK = \Delta CMA$ – по стороне и двум прилежащим углам. Следовательно, $BM = MC$.

Задача - История 6.

Не раз приходилось мне выступать и в роли миротворца. Вот, например, был такой случай… По сторонам углового поля *A* находились враждующие стороны. Я же – как всегда – в гуще событий (внутри угла в точке *M*). Для примирения противников необходимо было палатки полководцев поместить в такие точки *B* и *C*, чтобы я (точка *M*) оказался в точке пересечения медиан (центроиде) треугольника *ABC (рис.11)*. Тем самым я бы уравновесил и успокоил взаимные претензии сторон друг к другу. Итак, где я поместил командирские палатки?

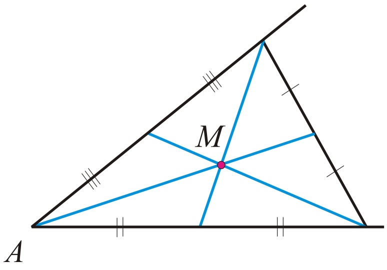

рис.11

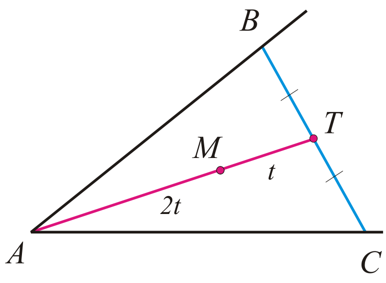

рис.12

Решение.

Зная, что три медианы пересекаются в одной точке – центроиде треугольника – и делятся ею в отношении $2:1$, считая от вершины, поступим таким образом: соединим точки *A* и *M*. Продлим отрезок *AM* на половину (за точку *M*) – получим точку *T (рис.12)*. Для точки *T* выполним *задачу-историю 5*, то есть построим точки *B* и *C* такие, чтобы *T* была серединой отрезка *BC*. Тогда *AT* – медиана в ΔABC. Поскольку $AM : MT = 2:1$, то точка *M* совпадает с центроидом ΔABC.

Задача - История 7.

Однажды я оказался один, без ружья, внутри углового участка *A* девственных лесов Мавритании. По сторонам угла рыскали лев и крокодил, не скрывая желания пообедать мной. Я же знал (поскольку разбирался в чудодейственных свойствах этой местности), что стоит им оказаться в таких точках *B* и *C* на одной прямой со мной, что площадь ΔABC будет наименьшей из всех возможных *(рис.13)*, как пасти льва и крокодила тоже станут наименьшими. А сами они превратятся соответственно в котёнка и лягушонка. Не без труда мне удалось отыскать точки *B* и *C*. Я бросил в эти точки свою треугольную шляпу и свою охотничью сумку. Лев и крокодил тотчас пришли на запах и… Где находятся волшебные точки *B* и *C*?

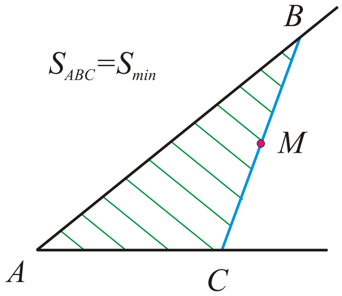

рис.13

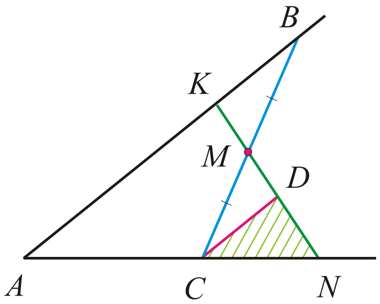

рис.14

Решение.

Как в *задаче-истории 5* построим точки B и C такие, что $BM = MC$. Покажем, что именно в этом случае мы и ограничим минимальную площадь. Допустим, что это не так и, например, ΔAKN будет иметь наименьшую площадь *(рис.14)*. Тогда проведём $CD \parallel AB$. Очевидно, $\Delta BMK = \Delta CMD$. Теперь понятно, что ΔAKN имеет «лишний» кусочек площади в виде заштрихованного ΔCDN. Таким образом, площадь ΔABC, где $BM = MC$, является наименьшей из всех возможных.

Задача - История 8.

У меня было совсем немного времени, чтобы приручить морского коня. Именно на нём я рассчитывал пересечь океан по поверхности водной глади и спастись от чудовища, которое, проглотив 300 кораблей с экипажами и мачтами, захотело на десерт полакомиться ещё и Мюнхгаузеном. Итак, представьте себе: угловой участок океана A, я внутри на доске – в точке M. Чтобы быстро приручить морского коня, необходимо найти на каждом из берегов такие точки B и C, чтобы периметр ΔBMC был наименьшим *(рис.15)*. Тогда морской конь, попав внутрь ΔBMC, мгновенно становится ручным. Скажу вам, я довольно быстро определил искомые точки B и C. Как мне это удалось?

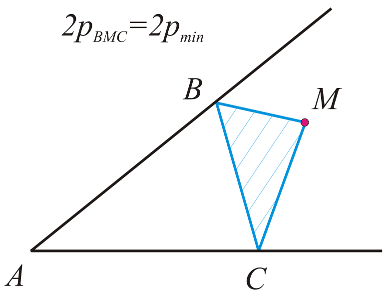

рис.15

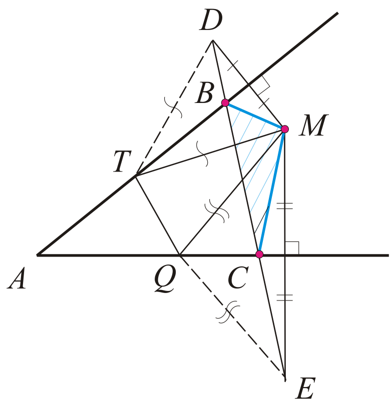

рис.16

Решение.

Выполнив зеркальные (симметричные) отображения точки M относительно сторон угла, получим точки D и E *(рис.16)*. Прямая DE пересекает стороны угла как раз в точках B и C. Покажем это. Из равенства отрезков $DB = MB$ и $EC = MC$ следует, что периметр ΔBMC равен длине отрезка DE. Предположим, что какой-то другой треугольник, например, ΔMTQ имеет периметр меньший, чем наш ΔMBC. Поскольку $DT = MT$ и $EQ = MQ$ *(покажите!)*, то периметр ΔMTQ равен длине ломаной линии: $DT + TQ + QE$. А длина этой ломаной больше длины отрезка DE. Вот и получается, что периметр ΔMTQ больше!

И в заключение, дорогие ребята, снова и снова хочу повторить: *никогда* не унывайте. Проявляйте изобретательность, смелость, находчивость. И тогда, уверяю Вас, все ваши *задачи-истории*, так же, как и мои, непременно завершатся Победно!..

Со слов Мюнхгаузена
записал Г.Филипповский