Обобщение теоремы Помпею

Е.БАКАЕВ

Существуют разные обобщения теоремы Помпею́, в этой статье мы докажем одно из них.

Для начала вспомним саму эту теорему.

Теорема Помпею. *На дуге BC окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC, взята произвольная точка P (рис.1). Тогда* $AP = BP + CP$.

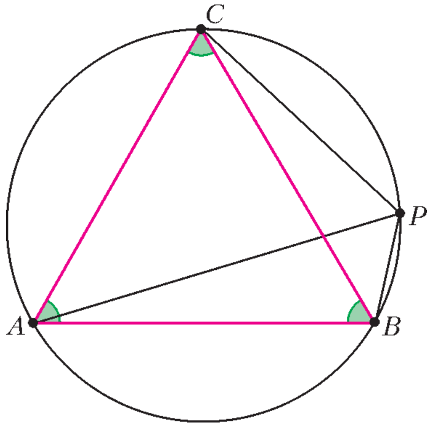

Рис. 1

Доказательство. Построим правильный треугольник BPQ внутрь окружности (рис.2), тогда точка Q будет лежать на отрезке AP, так как вписанные углы APB и APC равны 60°. Из равенства углов PBQ и ABC следует равенство углов PBC и QBA. Тогда треугольники PBC и QBA равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, $AP = AQ + QP = CP + BP$.

Теорема доказана.

Другие способы доказательства теоремы смотрите в статье «Теорема Птолемея и перекладывание треугольников» этого номера журнала, а также в [1] и [2].

По-видимому, эта теорема принадлежит ван Схотену (Франц ван Схотен, 1615–1660), но за ней закрепилось имя Помпею (Димитрие Помпею, 1873–1954), который в 1936 году доказал такое обобщение теоремы: *для всех точек P, не лежащих на описанной окружности треугольника ABC, из отрезков AP, BP и CP можно сложить треугольник, а для точек P, лежащих на ней, такой треугольник вырождается в отрезок.*

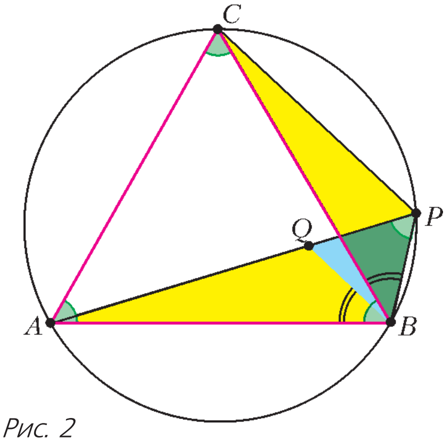

Рис. 2

* * *

Далее речь пойдет еще об одном обобщении теоремы Помпею.

Пусть $A_1A_2\ldots A_n$ *– правильный многоугольник с нечетным числом сторон, M – произвольная точка на дуге* A_1A_n *окружности, описанной около многоугольника (рис.3). Тогда сумма расстояний от точки M до вершин с нечетными номерами равна сумме расстояний от M до вершин с четными номерами.*

Это утверждение обычно доказывается с помощью теоремы Птолемея (см., например, [3] или [4]). Иные подходы (использующие

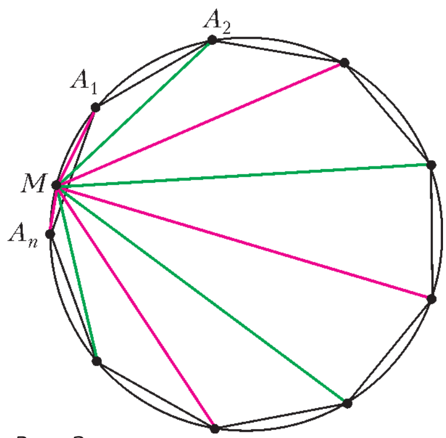

Рис. 3

тригонометрические функции и векторы) изложены в [2].

Мы приведем другое доказательство, являющееся в некотором роде развитием приведенного выше доказательства теоремы Помпею.

Доказательство. Построим внутрь окружности правильный n-угольник $MA_1B_2B_3\ldots$ $\ldots B_{n-1}$ со стороной A_1M (рис.4). Вершины нового многоугольника лежат на отрезках

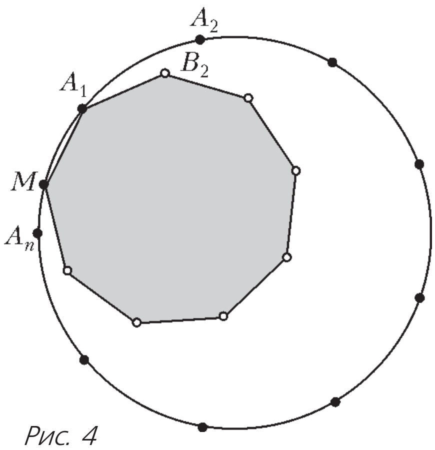

Рис. 4

$MA_2, MA_3, \ldots, MA_{n-1}$, потому что все стороны исходного многоугольника видны из точки M под одним и тем же углом $180°/n$, так как она лежит на его описанной окружности. Под тем же углом стороны нового многоугольника видны из его вершины M, ведь она лежит и на описанной окружности нового многоугольника.

Будем называть части отрезков $MA_1, MA_2, \ldots, MA_n$, ограниченные новым многоугольником (рис.5), *внутренними отрезками*, а лежащие вне него – *внешними отрезками*.

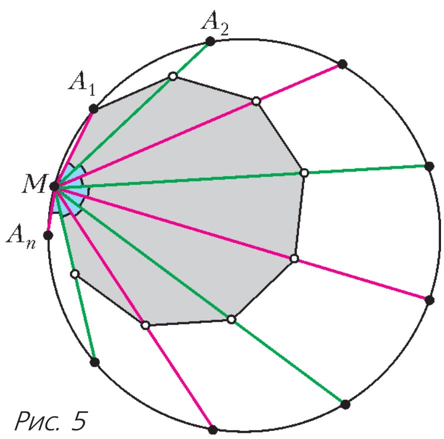

Рис. 5

Мы приведем несколько способов завершить доказательство, но в них всех построенный нами вспомогательный n-угольник будет играть ключевую роль.

Первый способ. Внутренние отрезки разбиваются на пары равных, так как это диагонали нового могоугольника. А правильный многоугольник с нечетным количеством сторон имеет ось симметрии, относительно которой его диагонали, проведенные из точки M, будут симметричны друг другу (рис.6).

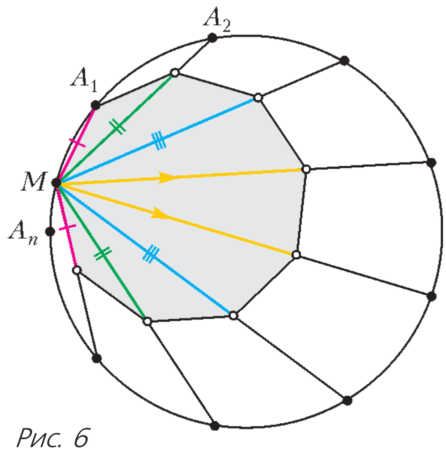

Рис. 6

Причем в каждой такой паре один из отрезков будет вести из точки M к вершине исходного многоугольника, имеющей нечетный номер, а другой – к имеющей четный номер.

Покажем теперь, что внешние отрезки также разбиваются на пары равных (рис.7). Тогда утверждение задачи будет доказано.

Рассмотрим одну из таких пар отрезков A_kB_k и A_mB_m $(k+m=n+2)$ и докажем их равенство (рис.8). Треугольники $A_1A_kA_m$ и

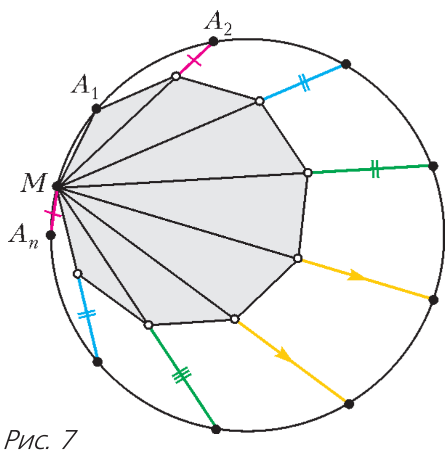

Рис. 7

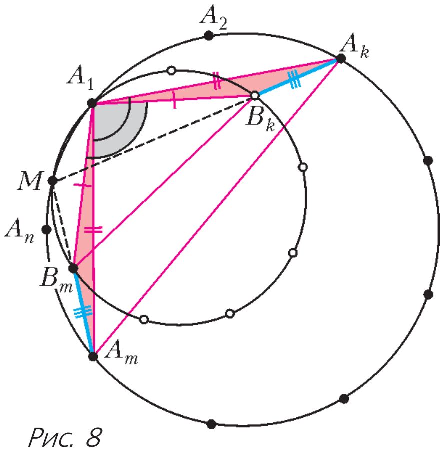

Рис. 8

$A_1B_kB_m$ – подобные равнобедренные, так как их вершины – соответствующие при подобии двух правильных n-угольников. Значит, треугольники $A_1A_kB_k$ и $A_1A_mB_m$ равны по двум сторонам и углу между ними, и отрезки A_kB_k и A_mB_m равны как их соответствующие элементы.

Заметим, что равенство этих отрезков можно было доказать иначе, сославшись на факт 1 из [5].

Второй способ. Проведем в новом n-угольнике его ось симметрии, проходящую через середину стороны A_1M. Отразим все внутренние отрезки относительно этой оси. Теперь вершина A_1 соединена двузвенными ломаными с остальными вершинами исходного многоугольника (рис.9).

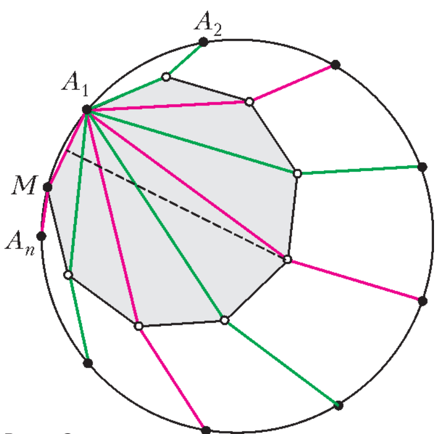

Рис. 9

Докажем, что суммарная длина красных ломаных равна суммарной длине зеленых ломаных.

Дополним эти ломаные до треугольников (рис.10). Они будут подобны между собой,

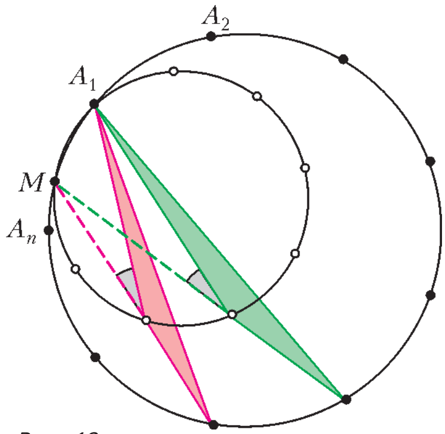

Рис. 10

потому что у них равны один внешний угол и один внутренний, так как эти углы вписаны в описанные окружности n-угольников.

Раз все эти треугольники подобны, то, если для каждого из них двузвенную ломаную заменить на третью сторону(рис.11),

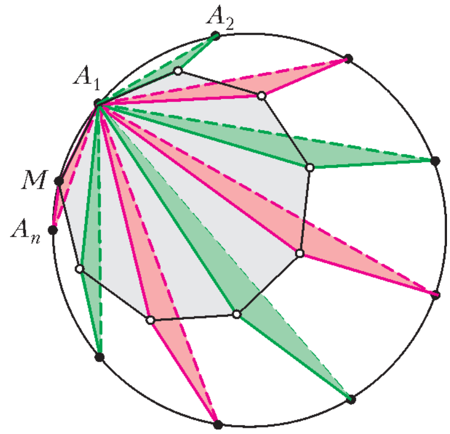

Рис. 11

суммарная длина изменится одинаково (уменьшится в одинаковое число раз). Таким образом, вместо сравнения суммарных длин ломаных можно сравнивать суммарные длины третьих сторон треугольников. А они являются диагоналями исходного многоугольника, поэтому разбиваются на пары равных.

Третий способ. Построим не только правильный n-угольник со стороной A_1M – будем называть его первым, но и еще один правильный n-угольник со стороной A_nM – будем называть его вторым (рис.12). Вершины второго многоугольника лежат на отрезках $MA_2, MA_3, \ldots, MA_{n-1}$ по той же причине, по какой на них лежат вершины первого. Оказывается, что внешние отрезки соответ-

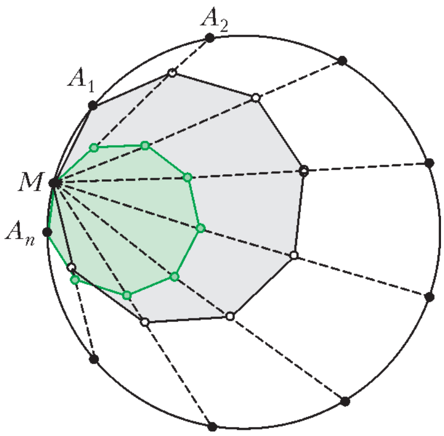

Рис. 12

ственно равны диагоналям второго многоугольника (рис.13). Докажем это.

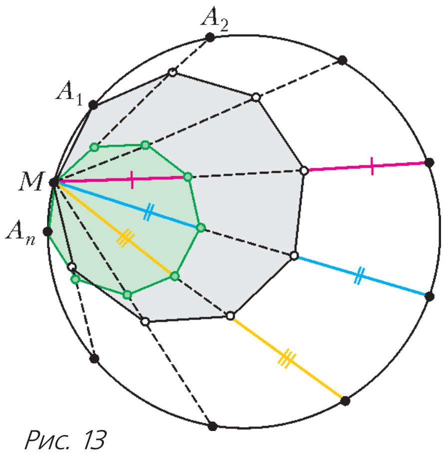

Рис. 13

Рассмотрим отрезок MA_k. Пусть лежащая на этом отрезке вершина первого многоугольника называется P, а второго многоугольника – Q (рис.14). Докажем, что $MQ = A_kP$.

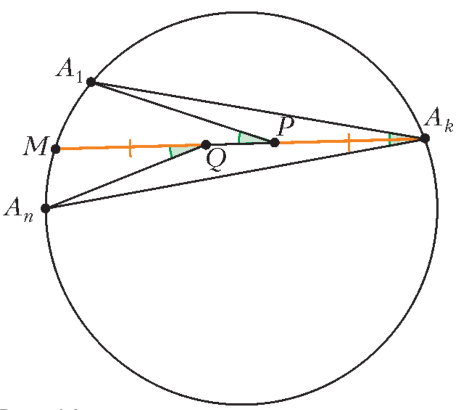

Рис. 14

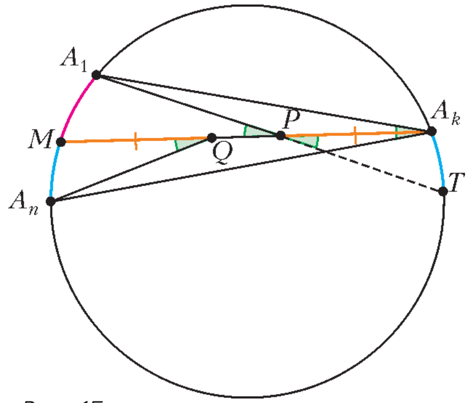

Рис. 15

Точки P, Q и A_k – вершины правильных n-угольников со сторонами A_1M, A_nM и A_1A_n соответственно. Значит, вписанные углы A_1PM, A_nQM и $A_1A_kA_n$ равны (рис.15).

Продлим отрезок A_1P до второго пересечения с окружностью в точке T. Угол $A_1A_kA_n$ равен половине дуги A_1A_n, а угол A_1PM – полусумме дуг A_1M и A_kT. Значит, дуги A_kT и A_nM равны. Тогда они симметричны относительно серединного перпендикуляра к хорде MA_k. Из равенства углов A_nQM и TPA_k следует, что при этой симметрии P перейдет в Q, что и означает равенство отрезков MQ и A_kP.

Итак, внешние отрезки соответственно равны диагоналям второго многоугольника. А значит, внешние отрезки разбиваются на пары равных, ведь на такие пары разбиваются диагонали правильного n-угольника, проведенные из одной вершины.

Литература

1. Сайт: http://zadachi.mccme.ru, задача №17.
2. *М.Панов, А.Спивак*. Вписанные многоугольники. – «Квант» №1 за 1999 г.
3. Сайт: http://zadachi.mccme.ru, задача №4786.
4. *В.В.Прасолов*. Задачи по планиметрии. – 6-е изд. – М.: МЦНМО, 2007. – № 6.45(а), с.156.
5. *А.Полянский*. Воробьями по пушкам! – «Квант» №2 за 2012 г.