Но вспомним еще, как создается давление: импульс молекулы i до нормального столкновения с поверхностью тела после упругого столкновения становится равным $-i$, так что каждая молекула сообщает телу импульс $i-(-i)=2i$. Значит, пар, не возвращающийся на одинокую каплю, лишает ее части внешнего давления. В результате при испарении в вакуум не нужно совершать работу по расширению пара.

Таким образом, в уравнении (1) в знаменателе правой части вместо L окажется величина L', меньшая L. Даже не решая это новое уравнение, можно видеть, что интенсивность убыли массы капли увеличится. Значит, теперь новая кривая температурной зависимости массы капли пройдет ниже прежней. Она изображена на рисунке 2 красной кривой.

Но тут всякий здравомыслящий отличник может воскликнуть: «Позвольте, а что же произойдет, когда температура капли достигнет значения $T_к$ = 273 К?!» Тут надо еще поразмышлять. Если вода капли абсолютно чистая, капля может оставаться жидкой даже при дальнейшем охлаждении – это так называемое метастабильное состояние. Если же в ней окажется соринка или электрический заряд, может начаться кристаллизация. При этом температура капли будет оставаться постоянной, так что убыль массы можно изобразить вертикальным отрезком. Масса будет уменьшаться до тех пор, пока теплота кристаллизации не будет унесена испаряющимися молекулами. Наконец, когда вся оставшаяся масса охладится до температуры кристаллизации, продолжится дальнейшее уменьшение массы и температуры за счет сублимации льда. Очевидно, что этот процесс можно описать теми же соотношениями, что и при испарении жидкой капли, подставив вместо теплоты испарения и теплопроводности воды теплоту сублимации и теплоемкость льда. Соответствующий график для такой «грязной» капли изображен на рисунке 2 синей линией.

Что же получается – капля не может сама себя полностью испарить?! Даже барон Мюнхгаузен, известный своей изобретательностью, не решился утверждать, что может сам себя разорвать в мелкие клочья.

Однако вернемся к постановке проблемы. Увы, в реальной вселенной нет абсолютной пустоты и абсолютного нуля температуры. Есть, по крайней мере, реликтовое излучение с температурой $T \sim 3$ К. И хотя бы оно (не говоря уже об излучении звезд или о потоках частиц) не дает одинокой капле жить вечно. Впрочем, эпиграф возвращает оптимизм. Тем более что, поступив в Московский физико-технический институт, вы сможете проанализировать все рассмотренные процессы гораздо подробнее.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Антипараллели и коники

П.КОЖЕВНИКОВ

ОБРАТИМСЯ К СТАТЬЕ О.ИВАНОВА, напечатанной в этом номере журнала, и посмотрим еще раз на конструкции из упражнения 7 (рис.1) и из задачи 4 (рис.2). Сходство не только внешнее: как мы видели, координатные решения этих задач похожи, как близнецы. Но поговорим еще немного о геометрическом и алгебраическом родстве этих конструкций.

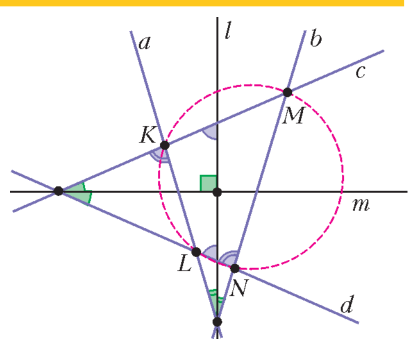

Рис. 1

Для начала обсудим, как решить упражнение 7 геометрически. По условию, на рисун-

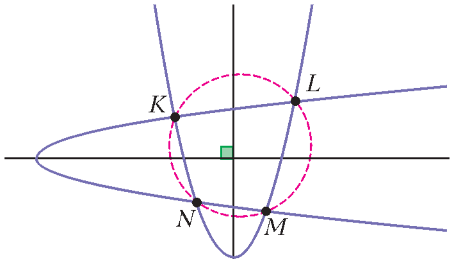

Рис. 2

ке 1 биссектрисы l и m углов между парами прямых перпендикулярны. Прямые c и d составляют равные углы с осью симметрии (биссектрисой) l угла между a и b. Пары прямых с таким свойством называют *антипараллелями*, или антипараллельными относительно пары прямых a и b. Прямые a и b получаются из прямой l поворотом на равные углы по часовой стрелке и против часовой стрелки, поэтому соответствующие углы между прямыми a и c и между прямыми b и d равны. Отсюда по известному признаку следует вписанность четырехугольника в пересечении прямых a, b, c, d. (Заметим, что эти рассуждения и вывод сохраняются и для других конфигураций антипараллелей; рис.3.) Нетрудно обратить рассуждения и

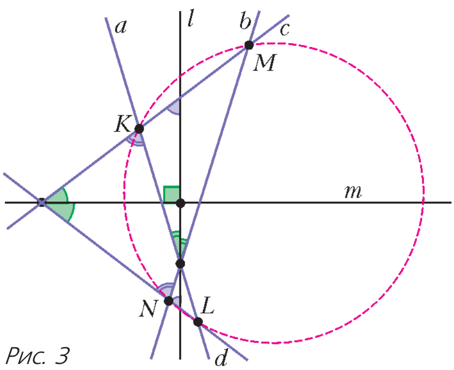

Рис. 3

доказать, что если окружность пересекает прямую a в точках K и L, а прямую b – в точках M и N, то пара прямых KM, LN (как и пара KN, ML) – это пара антипараллелей относительно пары прямых a и b. Итак, получается следующий **критерий антипараллельности**:

Пусть a и b – пара пересекающихся прямых, точки K и L лежат на прямой a и точки M и N – на прямой b (точки K, L, M, N различны). Точки K, L, M, N лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда KM и LN антипараллельны относительно пары прямых a и b.

Упражнения

1. Пусть a и b – пара пересекающихся прямых, точки K и L лежат на прямой a и точки M и N – на прямой b (точки K, L, M, N различны). Докажите, что прямые KN и LM антипараллельны относительно пары прямых a и b тогда и только тогда, когда KM и LN антипараллельны относительно пары прямых a и b.

2. Докажите, что если прямые c и d антипараллельны относительно пары прямых a и b, то и наоборот, прямые a и b антипараллельны относительно пары прямых c и d.

3. Пусть прямые d и d' симметричны относительно биссектрисы l угла между прямыми a и b. Докажите, что прямые c и d антипараллельны относительно пары прямых a и b тогда и только тогда, когда c и d' параллельны (или совпадают).

4. Пусть a и b – пара прямых, точки K, L, P лежат на прямой a и точки M, N, Q – на прямой b (все указанные точки различны) (рис.4). Докажите, что если K, L, M, N лежат на одной окружности и K, M, P, Q лежат на одной окружности, то $LN \parallel PQ$.

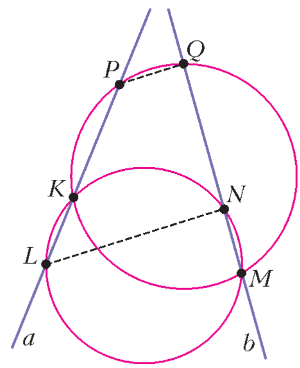

Рис. 4

В следующих двух упражнениях пересечение окружности и прямой «вырождается» в касание.

5. Пусть a и b – пара пересекающихся прямых, точки K и L лежат на прямой a и точка M – на прямой b. Докажите, что прямые KM и LM антипараллельны относительно пары прямых a и b тогда и только тогда, когда описанная окружность треугольника KLM касается прямой b (рис.5).

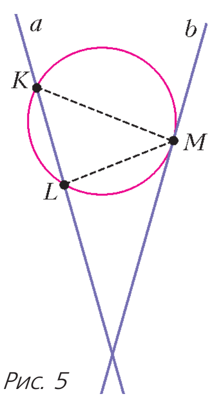

Рис. 5

6. Пусть $ABCD$ – трапеция, $AD \parallel BC$. Докажите, что описанная окружность треугольника ABD касается прямой CD тогда и только тогда, когда описанная окружность треугольника BCD касается прямой AB.

Посмотрим теперь на рисунок 2 – по условию, оси данных парабол перпендикулярны. Оказывается (мы покажем это ниже), что прямые KM и LN (или KL и MN, или KN и LM) составляют равные углы с осью каждой параболы, т.е. пару прямых KL и MN по праву можно назвать антипараллельными относительно параболы. С точки зрения подходящей системы координат (оси координат параллельны осям параболы) антипараллели – это прямые, имеющие противоположные угловые коэффициенты (либо прямые, параллельные оси ординат). (То же верно и для антипараллелей относительно пары прямых a и b, если за оси координат взять прямые, параллельные биссектрисам (внутренней и внешней) углов между прямыми a и b.) Итак, для параболы верен **аналог критерия антипараллельности**:

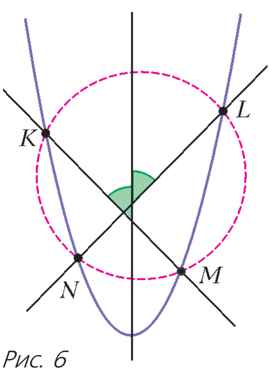

Рис. 6

Пусть различные точки K, L, M, N лежат на данной параболе (рис.6). Точки K, L, M, N лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда прямые KM и LN антипараллельны.

Докажем этот критерий в духе решений из статьи О.Иванова.

Выбрав оси параболы за оси координат, считаем, что парабола задана уравнением $y = ax^2$ или уравнением $F = 0$, где $F = x^2 - y/a$. Пусть $y = kx + b$ – уравнение прямой KM, $y = -kx + c$ – уравнение антипараллели l к прямой KM, проходящей через точку L; тогда уравнение $H = 0$, где $H = (y - kx - b)(y + kx - c)$, задает объединение этих антипараллелей. Заметим, что $H = y^2 - k^2x^2 + dx + ey + f$ для некоторых констант d, e, f. При любом фиксированном λ множество, заданное уравнением $H + \lambda F = 0$, содержит точки K, L, M (общие точки параболы и объединения прямых KM и l). Возьмем $\lambda = k^2 + 1$, тогда $H + \lambda F$ имеет вид $x^2 + y^2 + dx + gy + f$, значит, уравнение $G = 0$, где $G = H + \left(k^2 + 1\right)F$, задает окружность, а именно описанную окружность треугольника KLM.

Получаем следующее.

Если K, L, M, N лежат на одной окружности, то N лежит на описанной окружности треугольника KLM, поэтому координаты точки N удовлетворяют уравнению $G = 0$. Так как N лежит на параболе, то ее координаты удовлетворяют уравнению $F = 0$, а потому и уравнению $G - H = 0$, или $\left(k^2 + 1\right)F = 0 \Rightarrow F = 0$, значит, N принадлежит объединению прямых KM и l. Но поскольку прямая KM пересекает параболу в двух точках, точка N лежит на l, т.е. LN – антипараллель для KM.

Наоборот, если KM и LN антипараллельны, то координаты точки N удовлетворяют и уравнению $F = 0$, и уравнению $H = 0$, а значит, и уравнению $G = 0$, т.е. N лежит и на описанной окружности треугольника KLM.

Упражнения

7. Пусть точки K, L, P, M, N, Q лежат на одной параболе (рис.7). Докажите, что если K, L, M, N лежат на одной окружности и K, M, P, Q лежат на одной окружности, то $LN \parallel PQ$.

Следующие упражнения можно вывести из предыдущих рассуждений в случае, когда пересечение «вырождается» в касание. (Можно дать и независимые вычислительные решения.)

8. Пусть K, L, M – три различные точки на параболе такие, что прямые KM и LM антипараллельны. Докажите, что описанная окружность треугольника KLM касается параболы в точке M (рис.8).

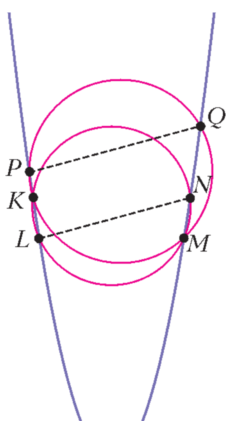

Рис. 7

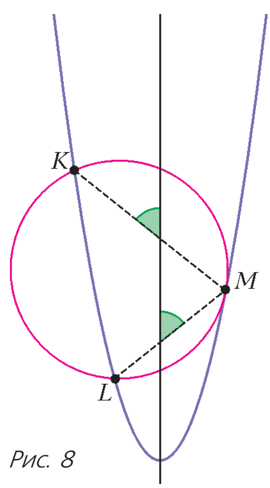

Рис. 8

9. Пусть даны две антипараллели к параболе, одна касается параболы в точке M, а другая пересекает параболу в точках K и L (точки K, L, M различные). Докажите, что описанная окружность треугольника KLM касается параболы в точке M (рис.9).

10 (С.Маркелов, Турнир городов, 2004 г.). На плоскости даны парабола и окружность, имеющие с параболой ровно две общие точки: K и M. Оказалось, что касательные к окружности и параболе в точке M совпадают. Обязательно ли тогда касательные к окружности и параболе в точке K также совпадают?

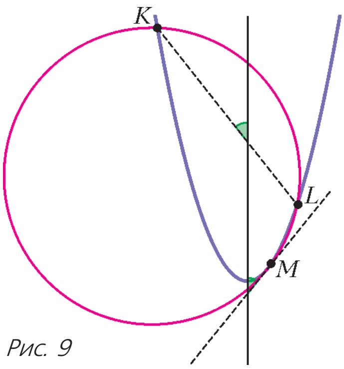

Рис. 9

Ответ: не обязательно.

Указание. Рассмотрим две антипараллели к параболе, одна антипараллель m касается параболы в точке M, а другая проходит через M и вторично пересекает параболу в точке K (рис.10). Тогда окружность, проходящая через K и касающаяся прямой m в точке M, – требуемая.

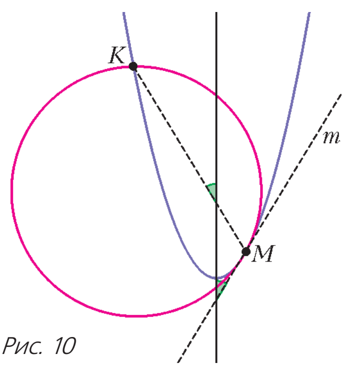

Рис. 10

11. Сформулируйте и докажите аналог утверждения упражнения 6 для двух параллельных секущих параболы.

Аналогично можно определить антипараллели относительно других кривых второго порядка (коник) – эллипса, гиперболы. При работе в данной прямоугольной системе координат получается одно и то же определение антипараллелей для большого класса $\mathcal{K}$ кривых, задаваемых уравнением вида

$$px^2 + qy^2 + rx + sy + t = 0$$

(где коэффициенты p и q одновременно не обращаются в 0).[1] Как мы видели, в класс $\mathcal{K}$ входит и объединение любой пары антипараллельных прямых $y = kx + b$, $y = -kx + c$. Предлагаем читателю обобщить утверждения, которые мы встретили для пар прямых и парабол. В частности, предлагаем доказать следующие утверждения:

Теорема о пересечении. *Пусть* α *и* β – *две различные кривые класса* $\mathcal{K}$, *имеющие четыре общие точки (рис.11). Тогда эти точки лежат на одной окружности.*

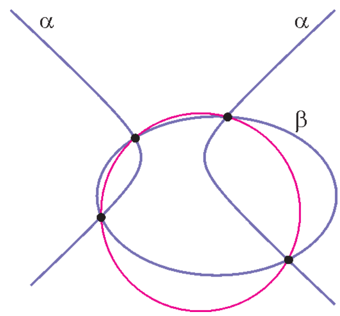

Рис. 11

Обобщенный критерий антипараллельности. *Пусть дана кривая* α *из класса* $\mathcal{K}$, *не являющаяся окружностью, и различные точки* K, L, M, N *на этой кривой такие, что* α *не содержит целиком ни прямую* KM, *ни прямую* LN. *Точки* K, L, M, N *лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда* KM *и* LN *антипараллельны (рис.12).*

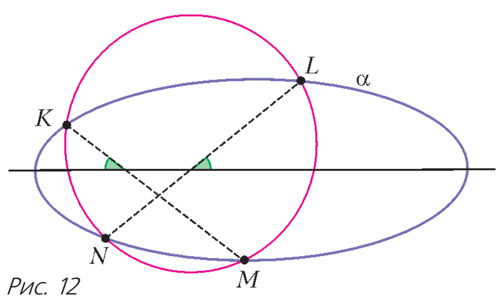

Рис. 12

[1] Кривые класса $\mathcal{K}$ – в точности кривые второго порядка, у которых главные направления параллельны осям координат.